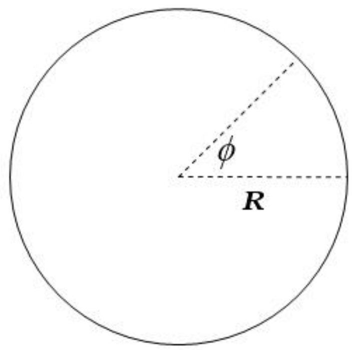
Clase Auxiliar # 6 FI21A-2

Prof. René Méndez
Aux. Gabriel Cuevas
03/09/2007

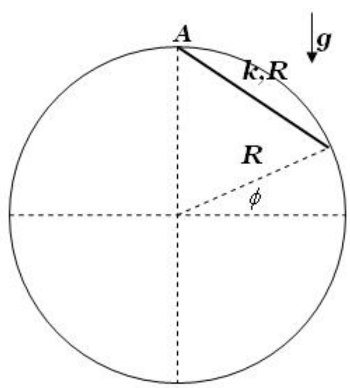
1. **Problema 1.** (P2 C2 2006-2 P. Cordero.)
   Una partícula P de masa m puede moverse sólo por un riel horizontal circunferencial de readio R. El único tipo de roce que hay es roce viscoso lineal, $-c\vec{v}$.

   a) Si P es lanzado, desde $\phi = 0$ con rapidez v_o, calcule el trabajo de la fuerza total después de que P ha avanzado hasta $\phi = \phi_1$.

   b) Determine el valor que debe tener v_o para que P se detenga justo cuando ha avanzado media vuelta.



2. **Problema 2.** (P1 C3 2006-2 P. Cordero.)
   Una partícula constreñida a moverse en un riel circunferencial (radio R) vertical, está además unida a un resorte de constante elástica k y largo natural R. El resorte está fijo en su otro extremo en el punto A que es cúspide de la circunferencia. No hay roce de ningún tipo y la aceleración de gravedad es g. Determine el valor de k para que la posición $\phi = 0$ sea un punto de equilibrio. Compruebe que se trata de equilibrio estable. ¿Cuánto vale la frecuencia de pequeñas oscilaciones?

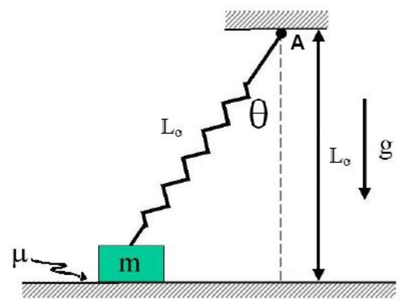


3. **Problema 3.** (P2 C2 2007-1 P. Aceituno.)
Una partícula de masa m se encuentra sobre una superficie horizontal con la cual tiene un coeficiente de roce cinético *desconocido*. La partícula está ligada mediante un resorte ideal de largo natural l_o y constante elástica k a un punto fijo A ubicado a una altura $H = l_o$ sobre la superficie. Se cumple la condición $kl_o = mg$. Inicialmente el resorte se encuentra en posición vertical y la partícula se mueve sobre la superficie hacia la derecha. Se pide:

   a) Demostrar que la partícula nunca se separa de la superficie, independiente de cual sea la condición inicial de movimiento.

   b) Si al impulsar la partícula con velocidad v_o desde la posición donde $\theta = 0^o$ se verifica que ésta avanza hasta un punto donde $\theta = \frac{\pi}{4}$, determine el cambio de energía mecánica total de la partícula entre las dos posiciones.

   c) Determine una expresión que permita calcular el valor del coeficiente de roce cinético μ.

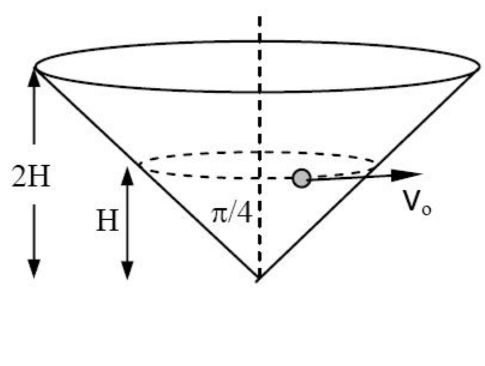


4. **Problema 4.** (P2 C2 2003-1 P. Aceituno.)
Considere una superficie cónica de ángulo de apertura $\pi/4$ y de altura $2H$, colocada en un ambiente sin gravedad. Se lanza por el interior del cono, y desde una altura H de su vértice, una partícula de masa m, con velocidad v_o en una dirección perpendicular al eje del cono. Calcule:

   a) Tiempo que demora la partícula en llegar al borde del cono.

   b) Fuerza que la superficie cónica ejerce sobre la partícula, justo antes de llegar al borde.

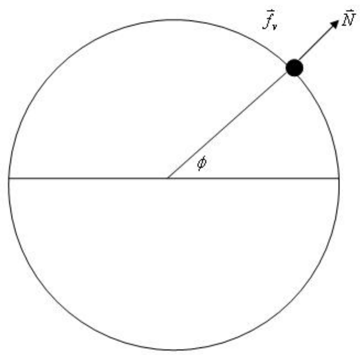
   c) Rapidez de la partícula cuando ésta pierde contacto con la superficie cónica.



Solución Clase Auxiliar # 6 FI21A-2

Prof. René Méndez
Aux. Gabriel Cuevas
03/09/2007

1. **Problema 1.**
   Realizamos el DCL de la partícula:



Podemos ver que la fuerza normal sigue la dirección del vector $\hat{\rho}$, en cambio la fuerza de roce viscosa debemos expresarla de la forma $-c\vec{v}$, donde $\vec{v}$ en este caso corresponde a:

$$\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$$

Es así como las fuerzas agrupadas según componentes quedan:

$$(\hat{\rho})\, N = -mR\dot{\phi}^2$$

$$\left(\hat{\phi}\right) - cR\dot{\phi} = mR\ddot{\phi}$$

La ecuación que utilizaremos será la segunda. Ahora calculamos $\dot{\phi}\,(\phi)$ para poder obtener los valores para los ángulos determinados.
Además sabemos que la condición inicial es que $\phi_o = \frac{v_o}{R}$, por lo tanto:

$$-c\dot{\phi} = m\dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$$

$$-\frac{c}{m}\int_0^{\phi} d\phi = \int_{\frac{v_o}{R}}^{\dot{\phi}} d\dot{\phi}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}\,(\phi) = \frac{v_o}{R} - \frac{c}{m}\phi$$

Realizados estos cálculos pasamos a resolver cada una de las partes:

a) Calcularemos el trabajo realizado por la fuerza total hasta que la partícula llega a $\phi = \phi_1$ mediante energía. El trabajo corresponderá a la diferencia entre las energías cinética final e inicial (ya que no existen potenciales que nos interesen):

$$E = \frac{1}{2}m\left(R\dot{\phi}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_o}{R} - \frac{c}{m}\phi\right)^2$$

$$E_i\,(\phi = 0) = \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$E_f\left(\phi=\phi_1\right)=\frac{1}{2}mv_o^2-Rv_oc\phi_1+\frac{1}{2}\frac{\left(Rc\phi_1\right)^2}{m}$$

Por lo tanto:

$$W_{Total}=E_f-E_i$$

$$W_{Total}=\frac{1}{2}\frac{\left(Rc\phi_1\right)^2}{m}-Rv_oc\phi_1$$

b) Para realizar esta parte sólo debemos imponer que $\dot{\phi}=0$ en media vuelta, es decir $\phi=\pi$:

$$0=\frac{v_o}{R}-\frac{c}{m}\pi$$

$$\Rightarrow v_o=\frac{Rc\pi}{m}$$

2. **Problema 2.**
Debemos encontrar la energía potencial (U) de la partícula. Nos fijaremos como potencial gravitatorio nulo ($U_g=0$) el centro de la circunferencia. Es así como:

$$U=U_{gravitatorio}+U_{elastico}$$

$$U_g=mgR\sin\left(\phi\right)$$

$$U_e=\frac{1}{2}k\left(\Delta-R\right)^2$$

Debemos calcular el valor de Δ para tener completamente descrita la expresión anterior. Para esto, utilizando el teorema del coseno se tiene que:

$$\Delta^2=R^2+R^2-2R^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=2R^2\left(1-\sin\left(\phi\right)\right)$$

Por lo tanto:

$$U=mgR\sin\left(\phi\right)+\frac{R^2}{2}k\left(\sqrt{2\left(1-\sin\left(\phi\right)\right)}-1\right)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi}=mgR\cos\left(\phi\right)+\frac{kR^2}{2}\left(-2\cos\left(\phi\right)+\frac{\sqrt{2}\cos\left(\phi\right)}{\sqrt{1-\sin\left(\phi\right)}}\right)$$

Para que $\phi=0$ sea un punto de equilibrio se debe cunplir que:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \phi}\right|_{\phi=0}=0$$

$$\Rightarrow mgR+\frac{kR^2}{2}\left(-2+\sqrt{2}\right)=0$$

De esta última expresión despejamos k:

$$k=\frac{2mg}{\left(2-\sqrt{2}\right)R}$$

Ahora calculamos la segunda derivada para ver si el punto de equilibrio es estable y además para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}=-mgR\sin\left(\phi\right)+\frac{kR^2}{2}\left(2\sin\left(\phi\right)+\sqrt{2}\left(\frac{-\sin\left(\phi\right)}{\sqrt{1-\sin\left(\phi\right)}}+\frac{\cos\left(\phi\right)^2}{2\left(1-\sin\left(\phi\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

Ahora evaluamos en el punto de equilibrio:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}\right|_{\phi=0}=\frac{\sqrt{2}kR^2}{4}>0$$

Debido a que lo que $\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} > 0$, se tiene que $\phi = 0$ es un punto de equilibrio estable.
Así se tiene finalmente que:

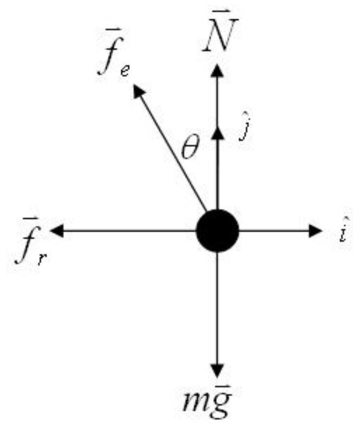
$$\omega_{po}^2 = \frac{1}{mR^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = \frac{\sqrt{2}k}{4m}$$

Reemplazando el valor de k:

$$\omega_{po}^2 = \frac{g}{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)R}$$

3. **Problema 3.**

   a) Para la primera parte del problema realizaremos un DCL, el cual se muestra a continuación:



Así las fuerzas según los ejes señalados en la figura quedan:

$$(\hat{\imath}) - f_e \sin\theta - f_r = m\ddot{x}$$

$$(\hat{\jmath})\, N - mg + f_e \cos\theta = m\ddot{y}$$

La fuerza elástica queda:

$$f_e = k\left(D - l_o\right)$$

La elongación del resorte la realizaremos en función del ángulo que éste presenta con respecto a la vertical:

$$\cos\theta = \frac{l_o}{D}$$

$$\Rightarrow D = \frac{l_o}{\cos\theta}$$

Por lo tanto la fuerza elástica queda:

$$f_e = \frac{kl_o}{\cos\theta}\left(1-\cos\theta\right)$$

Así reemplazando en la segunda ecuación nos queda:

$$N = mg - kl_o\left(1-\cos\theta\right) + m\ddot{y}$$

Para que la partícula se encuentre en contacto con la superficie, independiente que sea levantada por la fuerza de roce, no puede existir aceleración según el eje vertical, por lo tanto:

$$m\ddot{y} = 0$$

$$N = mg - kl_o (1 - \cos\theta)$$

Y reemplazando que:

$$kl_o = mg$$

$$N = mg\cos\theta$$

Según la expresión anterior se tiene que:

$$\Rightarrow N \geq 0$$

b) Para la segunda parte es conveniente emplear energía, por lo tanto esta nos queda:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(D - l_o)^2$$

Reemplazando D nos queda:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{kl_o^2}{\cos^2\theta}(1 - \cos\theta)^2$$

Así se tiene que inicialmente:

$$E_o = \frac{1}{2}mv_o^2$$

Y finalmente, en $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$E_f = \frac{kl_o^2}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$$

Por lo tanto se obtiene que la diferencia de energía ΔE es:

$$\Delta E = \frac{kl_o^2}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$$

c) Ahora para calcular el valor de μ, debemos encontrar el trabajo realizado por la fuerza de roce en el trayecto. Para eso verificaremos la distancia recorrida en función del ángulo con el fin de realizar el diferencial correspondiente para integrar:

$$\frac{x}{l_o} = \tan\theta$$

$$\Rightarrow dx = l_o\sec^2\theta d\theta$$

Además se tiene que:

$$f_r = \mu N$$

$$\Rightarrow f_r = \mu mg\cos\theta$$

Así el trabajo realizado por la fuerza de roce queda:

$$W_{f_r} = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mu mg\cos\theta l_o\sec^2\theta d\theta$$

$$W_{f_r} = -\mu mgl_o\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta d\theta$$

No se pide calcular explícitamente el valor de la integral así que:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta d\theta$$

De todas formas el valor de esta integral se da a continuación:

$$I = \ln\left(\tan\frac{\pi}{4} + \sec\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\tan 0 + \sec 0)$$

$$I = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Así se tiene que:

$$\mu = \frac{kl_o^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 - mv_o^2}{-2mgl_oI}$$

Reemplazando el valor de la integral queda:

$$\mu = \frac{mv_o^2 - kl_o^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2mgl_o\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$$