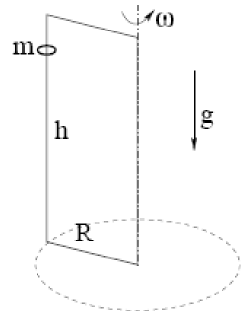
P1 Un rectángulo de alambre con dos lados horizontales (largo R), y dos lados verticales, gira en torno a uno de sus lados verticales (ver figura) con velocidad angular constante ω. Un anillo de masa m, que abraza uno de los lados verticales, es soltado desde una altura h del "fondo", con velocidad relativa nula con respecto al rectángulo. Se conoce los coeficientes de roce estático μ_e y dinámico $\mu_d < \mu_e$.

(a) Determine la condición para que el anillo caiga (condición para que no se quede pegado).

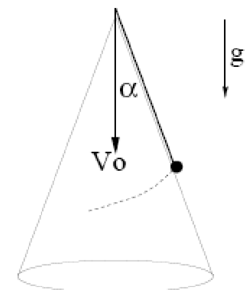
(b) Determine el tiempo que tarda en llegar al fondo.



P3 Una partícula de masa m se mueve sin roce sobre la superficie de un cono de ángulo de abertura α. La partícula está unida a una cuerda que pasa por un orificio en el vértice del cono, de donde es recogida con velocidad constante V_0, tal como se indica en la figura. Inicialmente, la partícula está a una distancia L del vértice del cono y gira con velocidad angular ω_0.

(a) Determine la distancia al vértice en que la partícula se despega de la superficie del cono.

(b) Calcule la tensión de la cuerda en ese instante.



La aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas:

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$$

Solución P1 La normal en cualquier caso es $N = mR\omega^2$. Si se quedara pegado se tendría una fuerza de roce estático equilibrando al peso: $F_{RE} = mg$ pero $|F_{RE}| \leq \mu_e mR\omega^2$. Para que <u>sí</u> deslice se debe cumplir

$$\omega^2 < \frac{g}{\mu_e R} \qquad \text{ergo} \qquad g > \mu_e R\omega^2$$

Si desliza, el movimiento vertical está regido por $m\ddot{z} = \mu_d mR\omega^2 - mg$ que implica $\dot{z} = -(g - \mu_d R\omega^2)t$ y $z = h - \frac{t^2}{2}(g - \mu_d R\omega^2)$ que se hace cero (momento en que llega al fondo) en el instante

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g - \mu_d R\omega^2}}$$

$\boxed{\textbf{Solución P3}}$ Se parametriza la posición de la partícula en coordenadas esféricas, donde $\theta = \alpha$. La distancia al origen satisface $\dot{r} = -V_0$. Las fuerza total sobre la partícula es

$$\vec{F} = N\hat{\theta} - T\hat{r} + mg(\hat{r}\cos\alpha - \hat{\theta}\sin\alpha)$$

que no tiene componente a lo largo de $\hat{\phi}$, asegurando que el torque es sólo en esa dirección.
En el caso de nuestro problema las componentes de la aceleración son

$$\begin{aligned} a_r &= -r\dot{\phi}^2\sin^2\alpha \\ a_\theta &= -r\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha \\ a_\phi &= \frac{1}{r\sin\alpha}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\alpha\right) \end{aligned}$$

Se ha hecho uso de dos propiedades de nuestro caso: $\theta = \alpha$ es constante y $\dot{r} = -v_0$. La ecuación a lo largo de $\hat{\phi}$, en este caso, se reduce a $a_\phi = 0$, que en el caso actual implica $r^2\dot{\phi}$ constante, y debe valer lo que implican las condiciones iniciales: $L^2\omega_0$, y por tanto

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_0 L^2}{r^2}$$

La ecuación a lo largo de $\hat{\theta}$ lleva directamente a obtener que la normal es

$$N = mg\sin\alpha - \frac{m\omega_0^2 L^3}{r^3}\sin\alpha\cos\alpha$$

De aquí es directo obtener que la normal se anula cuando r vale

$$r^* = \left(\frac{\cos(\alpha)\omega_0^2 L^4}{g}\right)^{1/3}$$

es decir, a esta distancia del vértice la partícula se desprende.
Por último, la ecuación a lo largo de $\hat{r}$ conduce a que la tensión tiene la forma

$$T = mg\cos\alpha + \frac{m\omega_0^2 L^4}{r^3}\sin^2\alpha$$

Al reemplazar el valor r^*, T se reduce a

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$