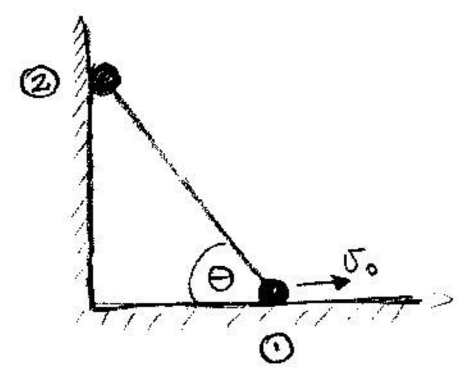
Auxiliar 2 =FI21A=

PROBLEMA 1xxx

Considere 2 partículas de masa m c/u, que están unidas por una barra de masa despreciable y largo L. La estructura se apoya sobre una pared vertical y sobre una superficie horizontal, con las cuales las partículas tienen roce despreciable. Sobre la partícula inferior se ejerce una fuerza F (de magnitud variable de modo que esta se aleja con rapidez cte v_0 de la pared. En el momento inicial la barra se encuentra vertical, con la partícula inferior tocando la pared.



a) Det. la magnitud de la aceleración y de la rapidez de la partícula superior, en fc. del ángulo θ

b) Det. el valor de v_0 si la partícula superior se desprende de la pared justo cuando el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$

Solución:

a) En coordenadas cartesianas..

Para ①
$$\vec{r}_1 = x\,\hat{\imath}$$
$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{x}\,\hat{\imath}$$
$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{x}\,\hat{\imath}$$

Para ②
$$\vec{r}_2 = y\,\hat{\jmath}$$
$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{y}\,\hat{\jmath}$$
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{y}\,\hat{\jmath}$$

$x = L\cos\theta$ pero $\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{\imath}$ $\wedge$ $\dot{\vec{r}} = v_o\hat{\imath}$

$\dot{x} = -L\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\Rightarrow \dot{x} = v_o \equiv cte$ (I)

$\Rightarrow \ddot{x} = 0$ (II)

$\ddot{x} = -L\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - L\dot{\theta}^2\cos\theta$

De (I)... $\dot{x} = -L\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = v_o$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{-v_o}{L\,\mathrm{sen}\,\theta}}$$

De (II)... $\ddot{x} = -L\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - L\dot{\theta}^2\cos\theta = 0$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\dot{\theta}^2\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

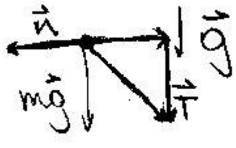
$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{v_o^2\cos\theta}{L^2\,\mathrm{sen}^3\theta}}$$

$y = L\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\dot{y} = L\dot{\theta}\cos\theta \Leftrightarrow \boxed{\dot{y} = -\frac{v_o\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}}$

$$\ddot{y} = L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{v_o^2\cos^2\theta}{L\,\mathrm{sen}^3\theta} - \frac{v_o^2}{L\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$= -\frac{v_o^2}{L}\left[\frac{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}{\mathrm{sen}^3\theta}\right] = \boxed{\frac{-v_o^2}{L\,\mathrm{sen}^3\theta} = \ddot{y}}$$

b) Suma de Fuerzas para la partícula superior (2)

DCL 

$m\vec{g} = -mg\,\hat{\jmath}$

$\vec{T} = T\cos\theta\,\hat{\imath} - T\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$

i) $0 = T\cos\theta + n$

$$\Rightarrow \boxed{n = -T\cos\theta} \quad (a)$$

j) $m\ddot{y} = -T\,\text{sen}\theta - mg$

Para el despegue imponemos $n = 0$.

$\Rightarrow T = 0 \quad \vee \quad \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ no es el caso relevante

$\therefore$ Condición de despegue en $\theta^* = \frac{\pi}{6}$

$n = 0 \iff T = 0$

$$m\ddot{y} = -mg$$

$$\ddot{y} = -g \iff \left.\frac{v_0^2}{L\,\text{sen}^3\theta} = g\,\right|_{\ddot{\theta} = \frac{\pi}{6}}$$

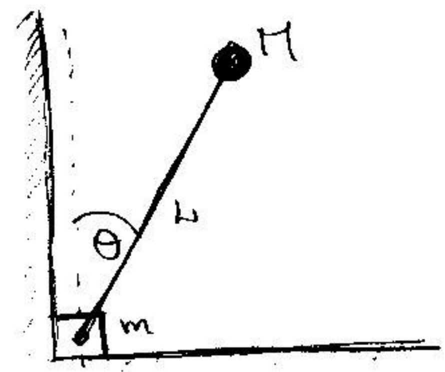
$$\frac{v_0^2}{L\left(\frac{1}{2}\right)^3} = g$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0^2 = \frac{gL}{8}}$$

PROBLEMA 2 xxx

Considere un bloque de masa m colocado sobre una superficie horizontal y apoyado sobre una pared vertical. En el centro del bloque se apoya una barra sobre un eje inserto en el bloque, de modo que puede girar libremente en un plano vertical. En el otro extremo de la barra, de largo L y masa despreciable, se fija otra partícula de masa $M = 2m$ Todos los roces son despreciables. Inicialmente la barra se encuentra y debido a un pequeño impulso, se destabiliza y cae:

a) Calcule la velocidad de la partícula M, en fc del ángulo θ q' forma la barra con la vertical, mientras q' el bloque no se desplaza

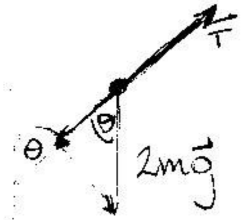


b) Det. los fuerzas normales q' la superficie horizontal y la pared, ejercen sobre el bloque (N_h y N_p respectivamente), en fc del ángulo θ, mientras q' este no desplaza

c) Indique q' sucede primero: el bloq se levanta de la superficie horizontal o se despega de la pared. ¿Para q' ángulo crítico θ^* esto ocurre?

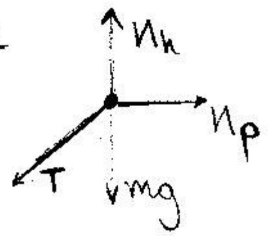
DCL Solución

M



Notar q' la barra se comprime por lo q' la fuerza q' ejerce esta sobre las masas apunta "hacia afuera" como reacción

m



Suma de fuerzas

Para M| en Polares $(\hat{\rho}, \hat{\theta})$

$\vec{r} = L\hat{\rho}$, $\dot{\vec{r}} = L\dot{\theta}\hat{\theta}$, $\ddot{\vec{r}} = -L\dot{\theta}^2\hat{\rho} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}$

$$-2mL\dot{\theta}^2\hat{\rho} + 2mL\ddot{\theta}\hat{\theta} = (T - 2mg\cos\theta)\hat{\rho} + 2mg\,\text{sen}\theta\,\hat{\theta}$$

$\hat{\rho})$ $-2mL\dot{\theta}^2 = T - 2mg\cos\theta$

$\hat{\theta})$ $2mL\ddot{\theta} = 2mg\,\text{sen}\theta$

Para m|

$\hat{\imath})$ $N_p - T\,\text{sen}\theta = 0$

$\hat{\jmath})$ $N_h - mg - T\cos\theta = 0$

a) Para M su velocidad es $\dot{\vec{r}} = L\dot{\theta}\hat{\theta}$

En la ecc. para $\hat{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\text{sen}\theta$$

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{L}\text{sen}\theta$$

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{g}{L}\text{sen}\theta\,d\theta \quad / \int \quad t=0 \quad \theta=0 \quad \dot{\theta}=0$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{g}{L}\text{sen}\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{L}(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{L}(1-\cos\theta)}}$$

$$\therefore \boxed{\dot{\vec{r}} = L\sqrt{\frac{2g}{L}(1-\cos\theta}\,\hat{\theta}}$$

b) en la ecc. para $\hat{\rho}$

$$-2mL\dot{\theta}^2 = T - 2mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow T = -2mL\dot{\theta}^2 + 2mg\cos\theta$$

$$T = 2m\left(g\cos\theta - \cancel{L}\,\frac{2g}{\cancel{L}}(1-\cos\theta)\right)$$

$$T = 2mg(3\cos\theta - 2)$$

reemplazando en las otras eccs...

$$N_\rho = T\operatorname{sen}\theta$$

$$\boxed{N_\rho = 2mg\operatorname{sen}\theta(3\cos\theta - 2)}$$

$$N_h = mg + T\cos\theta$$

$$\boxed{N_h = mg + 2mg\cos\theta(3\cos\theta - 2)}$$

c) Para determinar si se despega primero del piso o de la pared se impone
$N_p = 0 \wedge N_h = 0$

N_p | $N_p = 0 \iff 2mg\,\text{sen}\theta\,(3\cos\theta - 2) = 0$

$\text{sen}\theta \neq 0$ (excepto en $t = 0$, pero este caso no es relevante)

$\Rightarrow 3\cos\theta - 2 = 0$

$\cos\theta = \frac{2}{3}$, $\boxed{\theta^* = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)}$

N_h | $N_h = 0 \iff mg + 2mg\cos\theta(\cos\theta - 2) = 0$

$1 + 6\cos^2\theta - 4\cos\theta = 0$

$\cos\theta = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{12}$ lo q' no puede ser $\theta \in \mathbb{R}$

$\therefore N_h \neq 0 \quad \forall t > 0$

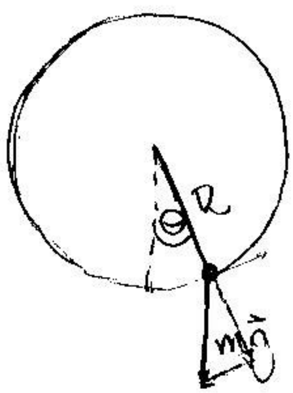
con lo q' se tiene q' se despega de la pared primero en $\theta^* = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ ☑

PROBLEMA 3xxx

Considere un péndulo compuesto por una vara rígida de largo R y masa despreciable, que en su extremo tiene una masa puntual m. El sistema es impulsado con una velocidad angular inicial ω_0 cuando la masa está en su posición más baja.

a) Det. los valores extremos (máximo y mínimo) de ω_0 para q' el péndulo alcance un ángulo entre $\frac{\pi}{2}$ y π, con respecto a la vertical.

b) Considere el mismo péndulo anterior excepto q' la barra rígida ha sido reemplazada por un hilo inextensible de largo R. ¿Cuál es el valor mínimo de ω_0 para q' la masa alcance una altura R sobre el eje del péndulo?



Solución:

En polares $(\hat{\rho}, \hat{\theta})$

$\vec{r} = R\hat{\rho}$, $\dot{\vec{r}} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$, $\ddot{\vec{r}} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$

$m\vec{g} = mg\cos\theta\,\hat{\rho} - mg\,\text{sen}\theta\,\hat{\theta}$

$\vec{T} = -T\hat{\rho}$

$\hat{\rho})\ -mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$

$\hat{\theta})\ mR\ddot{\theta} = -mg\,\text{sen}\theta$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\,\text{sen}\theta$$

Para q' alcance $\frac{\pi}{2}$ $\quad \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{R}\,\text{sen}\theta \quad / \int_{t=0,\ \theta=0,\ \dot{\theta}=\omega_0}^{\theta=\frac{\pi}{2},\ \dot{\theta}=0}$

$$\int_{\omega_0}^{0} \dot\theta \, d\dot\theta = \int_0^{\pi/2} -\frac{g}{R} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\left.\frac{\dot\theta^2}{2}\right|_{\omega_0}^{0} = \left.\frac{g}{R}\cos\theta\right|_0^{\pi/2}$$

$$-\frac{\omega_0^2}{2} = -\frac{g}{R} \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{2g}{R}}$$

para q' alcance π

$$\dot\theta \frac{d\dot\theta}{d\theta} = -\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta \quad / \int_{t=0,\ \theta=0,\ \dot\theta=\omega_0}^{\theta=\pi \quad \dot\theta=0}$$

$$\int_{\omega_0}^{0} \dot\theta \, d\dot\theta = -\frac{g}{R}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$-\frac{\omega_0^2}{2} = \left.\frac{g}{R}\cos\theta\right|_0^{\pi}$$

$$-\frac{\omega_0^2}{2} = \frac{g}{R}(-1-1)$$

$$\omega_0^2 = \frac{4g}{R} \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{4g}{R}}$$

$\therefore$ Para q' alcance ángulos entre π y $\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\frac{2g}{R} \leq \omega_0^2 \leq \frac{4g}{R}}$$

b) Para q' la masa alcance una altura R sobre el eje i.e. $\theta = \pi$ tomamos el caso crítico en q' $T = 0$, en la ecc de $\hat{\rho}$)

$$T = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}\cos\theta \Big|_{\theta=\pi}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Entonces se tiene

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta \quad / \int_{t=0,\ \theta=0,\ \dot{\theta}=w_0}^{\theta=\pi,\ \dot{\theta}=\sqrt{\frac{g}{R}}}$$

$$\int_{w_0}^{\sqrt{g/R}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2}\Big|_{w_0}^{\sqrt{g/R}} = \frac{g}{R}\cos\theta\Big|_0^{\pi}$$

$$\frac{g}{R} - w_0^2 = \frac{2g}{R}(-1-1)$$

$$\boxed{w_0^2 = \frac{5g}{R}}$$