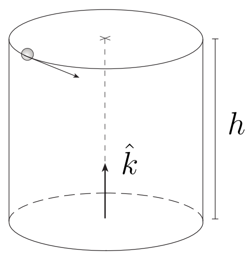
Solución P1 Auxiliar - Lunes 27 de Agosto

FI21A - Mecánica
Prof. Patricio Cordero
Semestre Primavera 2007
Auxs: Francisco Mena & Kim Hauser

Solución

(a)



Comenzamos por elegir un sistema de coordenadas cilíndricas con origen tal que la coordenada z sea nula en el fondo del cilindro. Con esto el vector posición inicialmente queda: $\vec{r} = R\hat{\rho} + h\hat{k}$. La posición, velocidad y aceleración para cualquier instante está determinada entonces por los vectores:

$$\vec{r} = R\hat{\rho} + z\hat{k}, \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}, \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

Las fuerzas existentes son el roce viscoso, de la forma $\vec{F}_{r.v.} = -c\vec{v}$, la normal $\vec{N} = -N\hat{\rho}$, y el peso $m\vec{g} = -mg\hat{k}$. Reemplazando $\vec{v}$ en la expresión para el roce viscoso, las ecuaciones escalares de movimiento quedan:

$$\begin{array}{ll} \hat{\rho}) & -mR\dot{\theta}^2 = -N \\ \hat{\theta}) & mR\ddot{\theta} = -cR\dot{\theta} \longrightarrow Integrable \\ \hat{k}) & m\ddot{z} = -mg - c\dot{z} \longrightarrow Integrable \end{array}$$

Buscamos $\vec{v}_z(t) = \dot{z}(t)\hat{k}$, que sale de integrar la ecuación $\hat{k}$):

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -(g + \frac{c}{m}\dot{z}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{z}}{g + \frac{c}{m}\dot{z}} = -dt \quad \Big/ \int_{\dot{z}_o=0}^{\dot{z}(t)}, \int_{t_o=0}^{t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{c}\ln(1 + \frac{c}{mg}\dot{z}) = -t$$

$$\therefore \quad \boxed{\dot{z}(t) = \frac{mg}{c}\left[e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right]}$$

Para encontrar $z(t)$ integramos $\dot{z}(t)$:

$$dz = \frac{mg}{c}\left[e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right]dt \quad \Big/ \int_{z_o=h}^{z(t)}, \int_{t_o=0}^{t} \quad \Rightarrow \quad z(t) = h - \left[\frac{m^2 g}{c^2}e^{-\frac{c}{m}t}\right]_0^t - \frac{mg}{c}t$$

$$\therefore \quad \boxed{z(t) = h - \frac{mg}{c}t - \frac{m^2 g}{c^2}\left[e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right]}$$

(b) Para calcular la velocidad angular, $\dot{\theta}$, integramos $\hat{\theta}$):

$$\frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{c}{m}dt \quad \Big/ \int_{\dot{\theta}_o=\frac{v_o}{R}}^{\dot{\theta}}, \int_{t_o=0}^{t}$$

$$\Rightarrow \ln\left[\frac{R\dot{\theta}}{v_o}\right] = -\frac{c}{m}t$$

$$\therefore \boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{v_o}{R}e^{-\frac{c}{m}t}} \quad (*)$$

(c) La condición a imponer para que dé sólo una vuelta ($\theta_f - \theta_i = 2\pi$), suponiendo que ($h \to \infty$), es que también el tiempo que demora en caer hasta el fondo del cilindro será infinito ($t \to \infty$). Así, podemos integrar la ecuación ($*$):

$$d\theta = \frac{v_o}{R}e^{-\frac{c}{m}t}dt \quad \Big/ \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}, \int_{t=o}^{t=\infty}$$

$$\Rightarrow 2\pi = -\frac{v_o m}{Rc}\left[e^{-\frac{c}{m}t}\right]_0^{\infty} = 0 + \frac{mv_o}{Rc}$$

$$\therefore \boxed{c = \frac{mv_o}{2\pi R}}$$