$\boxed{\textbf{P}}$

Se observa una partícula en movimiento con respecto a un sistema de referencia inercial. La trayectoria está dada por las siguientes funciones:

$$\rho = Ae^{k\theta}, \qquad z = h\rho$$

donde ρ, θ y z son las respectivas coordenadas cilíndricas (con A, k, h positivos). Suponiendo que su rapidez es constante (v_o) y conocida:

(a) Calcule la velocidad $\vec{v}$ de la partícula en función de θ, A, k, h y v_o.

(b) Encuentre su aceleración $\vec{a}$ en función de los mismos parámetros.

(c) Probar que $\vec{a} \perp \vec{v}$.

(d) Encuentre una expresión para $\theta(t)$.

$\boxed{\textbf{Solución}}$

(a) Dado que estamos describiendo la posición de la partícula en coordenadas cilíndricas, el vector posición es, por definición:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} = Ae^{k\theta}\hat{\rho} + hAe^{k\theta}\hat{k} \\
\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} &= Ake^{k\theta}\dot{\theta}\hat{\rho} + Ae^{k\theta}\dot{\theta}\hat{\theta} + hkAe^{k\theta}\dot{\theta}\hat{k} \\
\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} &= Ae^{k\theta}\dot{\theta}(k\hat{\rho} + \hat{\theta} + hk\hat{k})
\end{aligned}$$

No conocemos aún el valor de $\dot{\theta}$, pero sabemos que la rapidez de la partícula vale siempre v_o, esto es: $||\dot{\vec{r}}|| = v_o$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & ||\dot{\vec{r}}|| = A\dot{\theta}e^{k\theta}\sqrt{k^2+1+h^2k^2} = v_o \\
\Rightarrow \quad & A\dot{\theta}e^{k\theta} = \frac{v_o}{\sqrt{k^2+1+h^2k^2}} \qquad (1) \\
\Rightarrow \quad & \boxed{\dot{\vec{r}} = \frac{v_o}{\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}(k\hat{\rho}+\hat{\theta}+hk\hat{k})}
\end{aligned}$$

(b) Con el resultado anterior, calculamos $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{v_o}{\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}(k\dot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}\hat{\rho}) \\
&= \frac{v_o\dot{\theta}}{\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}(k\hat{\theta} - \hat{\rho})
\end{aligned}$$

Pero de (1): $\dot{\theta} = \frac{v_o}{Ae^{k\theta}\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}$ (2)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \frac{{v_o}^2}{Ae^{k\theta}(k^2+1+h^2k^2)}(k\hat{\theta} - \hat{\rho})}$$

(c) Definamos primero, para simplificar la notación, $B \equiv \frac{v_o}{\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}$.
Demostrar que $\vec{a} \perp \vec{v}$ se puede hacer de dos formas, pero ambas para concluir que $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$.
La primera, más simple, es considerar que $\vec{v} \cdot \vec{v} = {v_o}^2$. Así:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{a} = 2\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$$

La otra es calcular directamente $\vec{a} \cdot \vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= \frac{B^3}{Ae^{k\theta}}(k\hat{\theta} - \hat{\rho})(k\hat{\rho} + \hat{\theta} + hk\hat{k}) \\ &= \frac{B^3}{Ae^{k\theta}}(k - k) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \vec{a} \perp \vec{v}$$

(d) Por último, de (2) tenemos que:

$$\begin{aligned} & \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{B}{Ae^{k\theta}} \\ \Rightarrow \quad & e^{k\theta} d\theta = \frac{B}{A} dt \quad / \int \\ \Rightarrow \quad & \int e^{k\theta} d\theta = \int \frac{B}{A} dt \\ \Rightarrow \quad & \frac{e^{k\theta}}{k} = \frac{B}{A} t + c \longrightarrow \text{depende de las condiciones iniciales, que no tenemos.} \end{aligned}$$

Despejando θ y reemplazando el valor de B obtenemos:

$$\boxed{\theta(t) = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{kv_o}{A\sqrt{k^2+1+h^2k^2}} t + kc\right)}$$