

Fi1002 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Semestre 2007-2

Unidad 5B - Oscilaciones y roce con el aire

Por: Hugo F. Arellano

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

28 de septiembre de 2007

Indice

3. Interacción de una esfera con el aire	2
3.1. El frenado de un globo (sin gravedad)	3
3.2. La fuerza de Stokes	5
3.3. La fuerza de arrastre de Rayleigh	6
3.4. Oscilaciones amortiguadas	6
3.5. Péndulo formado por un globo	8
3.6. Lectura complementaria	9

Unidad 3

Interacción de una esfera con el aire

El desplazamiento de un globo en un medio fluído, como lo es el aire, es un fenómeno fascinante y a su vez sumamente intrigante. Aun a estas alturas de nuestra civilización, con toda la tecnología disponible, conocimiento e incontables aciertos en la física, este simple fenómeno esconde innumerables misterios que aun no han podido ser explicados. Tales limitaciones no impiden, sin embargo, intentar un acercamiento fenomenológico del comportamiento de un globo cuando jugamos con él. Este conocimiento nos permitirá comprender algo sobre la caída de un paracaídas, lo costoso que es andar rápido en la carretera, las ideas detrás del vuelo de un helicóptero, la caída de una pluma en el aire, el arrastre de las aguas, el despegue del transbordador espacial o el hundimiento de una piedra en una laguna. Es una característica de estos sistemas la atenuación del movimiento relativo entre el fluído y el objeto.

Para simplificar ideas consideremos un volumen esférico, en ausencia de gravedad e inmerso en una cámara con aire quieto. Si $\vec{r}$ representa la posición del centro de la esfera, entonces al desplazar el globo en $\delta\vec{r}$, se manifestará una resistencia del aire sobre el globo, oponiéndose al desplazamiento.

En general podemos representar la fuerza del aire sobre el globo de la forma

$$\vec{F} = -f(|\vec{v}|)\hat{v} ,$$

con $-\hat{v}$ representando un vector unitario en sentido opuesto al desplazamiento.

La forma general de $f(v)$ va a depender del régimen de velocidades, densidad del aire, propiedades termodinámicas, geometría del cuerpo, entre muchas otras. Se reconocen, sin embargo, dos regímenes de velocidades donde $f(v)$ es simple:

$$f(v) \rightarrow f_s(v) \propto v$$

para movimientos 'lentos' en los cuales priman las fuerza viscosas, y

$$f(v) \rightarrow f_r(v) \propto v^2 ,$$

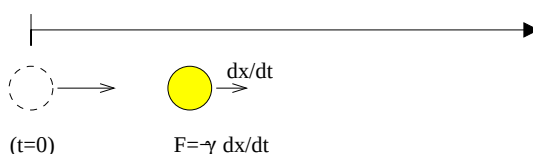
para movimientos rápidos, que típicamente conllevan a la generación de turbulencias.

3.1. El frenado de un globo (sin gravedad)

Un sistema simple consiste en una esfera de masa m rodeada de aire y en ausencia de gravedad. El movimiento es unidimensional (según un eje 'x'), donde suponemos una fuerza del tipo

$$F_x = -bv_x ,$$

denotando por b al *coeficiente de roce viscoso* (notación Serway). Además, supondremos que el globo parte ($t = 0$) con rapidez v_o .



Al aplicar la segunda ley de Newton ($F_x = m dv_x/dt$) tenemos

$$m \frac{dv_x}{dt} = -bv_x , \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_x ,$$

con $\tau = m/b$. Claramente τ tiene dimensiones de tiempo. En esta ecuación uno se plantea la siguiente pregunta:

¿Cuál es aquella función $v_x(t)$, que al derivarla es proporcional a ella misma? La respuesta la encontramos en la función exponencial, particularmente

$$v_x = A e^{-t/\tau} .$$

Aquí, A representa una constante que está restringida por la *condición inicial*, vale decir, datos dados en $t = 0$. Recordamos que en $t = 0$, $v_x = v_o$, entonces $A = v_o$. De esta forma,

$$v_x = v_o e^{-t/\tau} .$$

Notar que la velocidad se atenúa exponencialmente ($1/e \approx 0.368$), lo que se ilustra en la tabla siguiente:

t	v_x
0	1.000 v_o
τ	0.368 v_o
2τ	0.135 v_o
3τ	0.050 v_o
4τ	0.020 v_o
5τ	0.007 v_o

El resultado anterior para $v_x(t)$ puede ser utilizado para obtener $x(t)$. Escribimos

$$v_x = v_o e^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_o e^{-t/\tau}.$$

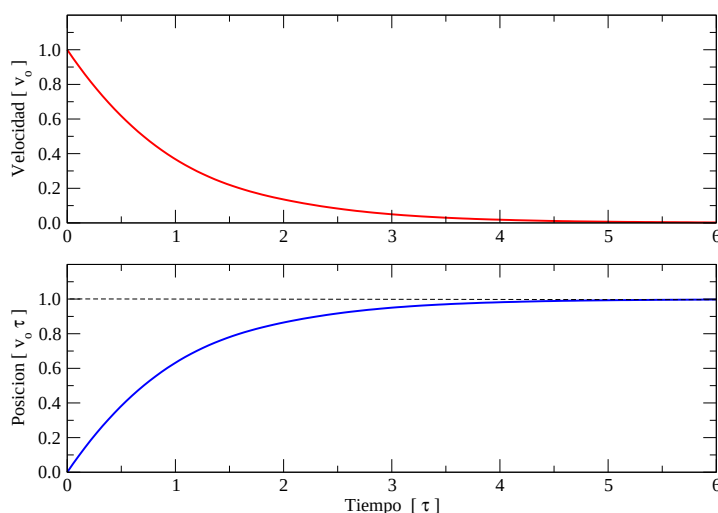
Esta vez nos preguntamos por cuál es aquella función que al derivar resulta una exponencial en t . La respuesta a ello es ¡la misma exponencial!. Planteamos

$$x(t) = -v_o \tau e^{-t/\tau} + C,$$

con C una constante que ha de ser determinada por la condición inicial. Si exigimos que en $t = 0$ la posición del globo es el origen ($x = 0$), entonces $C = v_o \tau$, con lo cual

$$x(t) = v_o \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

Un gráfico de esta función se ilustra en la figura siguiente, y se observa que para un tiempo muy grande, $x \rightarrow v_o \tau$. El globo no pasará de esa distancia. Cuan lejos queda tal punto dependerá de $\tau = m/b$; mientras más chico sea b (la fricción), más lejos llegará el globo. Lo mismo ocurre si es más masivo.



La caída vertical por gravedad cuando actúa el roce viscoso se puede representar mediante la ecuación $\ddot{y} = g - (1/\tau)\dot{y}$. Si el objeto parte del reposo en $y = 0$, entonces $y(t)$ queda dado por

$$y(t) = g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1 \right) .$$

La velocidad terminal v_t es aquella que adquiere el cuerpo cuando deja de acelerar. En este caso es cuando el peso (mg) equipara la fuerza por roce (bv_t). Así,

$$v_t = \frac{mg}{b} = g\tau .$$

3.2. La fuerza de Stokes

Si consideramos una esfera inmersa en un fluido muy viscoso y hacemos que el líquido fluya suavemente, como se ilustra en la figura, entonces la fuerza del fluido toma una forma bastante simple. La expresión para tal fuerza fué deducida por Sir George Gabriel Stokes, en el año 1840. Si la esfera tiene un radio R y la viscosidad del fluido es η (de dimensiones $ML^{-1}T^{-1}$), entonces la fuerza de arrastre está dada por

$$F_{Stokes} = 6\pi R\eta v$$

donde v es la rapidez del fluido. Nótese que la fuerza es proporcional al radio de la esfera, y no a su área transversal.



3.3. La fuerza de arrastre de Rayleigh

Al igual que en el caso de la fuerza de Stokes, Lord Rayleigh obtiene una fórmula para el arrastre de un fluido sobre un cuerpo. En este caso la expresión viene dada por

$$F_a = \frac{1}{2} \rho v^2 C_d A$$

donde ρ es la densidad del fluido, A es el área transversal del objeto, y C_d es un coeficiente de arrastre, típicamente entre 0.25 y 0.45 para un vehículo.

A modo de estimación, considerando la densidad del aire igual a $1,3 \text{ kg/m}^3$, un objeto de sección transversal de 1 m^2 , a una velocidad de 10 m/s (36 km/h), $C_d \sim 1$, entonces la fuerza de arrastre resulta del orden de

$$F_a \sim 0.5 \times 1.3 \times 10^2 \times 1 = 65 \text{ N}.$$

La fuerza se cuadruplica si la velocidad aumenta al doble.

Cuando un objeto cae verticalmente por gravedad, en presencia de una fuerza de roce cuadrática en la velocidad, su movimiento queda descrito por

$$m\ddot{y} = mg - cv_y^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = g - \beta^2 v_y^2.$$

Si inicialmente $v_y(0) = 0$ entonces se obtiene para la velocidad

$$v_y(t) = \frac{1}{\beta} \frac{1 - e^{-\beta g t}}{1 + e^{-\beta g t}}$$

La cantidad $1/\beta = \sqrt{c/m}$, representa la velocidad terminal (v_t), de modo que podemos re-escribir convenientemente

$$v_y(t) = v_t \frac{1 - e^{-gt/v_t}}{1 + e^{-gt/v_t}}.$$

3.4. Oscilaciones amortiguadas

En la unidad anterior se estudiaron oscilaciones armónicas mecánicas. Así por ejemplo, si $x(t)$ representa la posición de un objeto, entonces su movimiento está descrito por la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0,$$

donde ω_o representa la *frecuencia natural* del sistema. La solución $x(t)$ a esta ecuación es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_o) .$$

En ella, las constantes A (amplitud) y ϕ_o (constante de fase) dependen de las condiciones iniciales del sistema. En contraste, ω_o depende exclusivamente de sus propiedades físicas.

Consideremos esta vez el sistema formado por un bloque de masa m unido a un resorte de constante elástica k . Además, tomaremos en cuenta el efecto de una fuerza de roce viscoso $-b\dot{x}$ actuando sobre el bloque.



De acuerdo a la Segunda Ley de Newton, $ma_x = F_x$, tenemos

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 .$$

En forma estándar,

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = 0 ,$$

donde τ representa un tiempo de atenuación. En la asignatura de *Mecánica*, se estudiará en algún detalle sistemas que resultan descritos por este tipo de ecuaciones. La solución $x(t)$ en este caso es

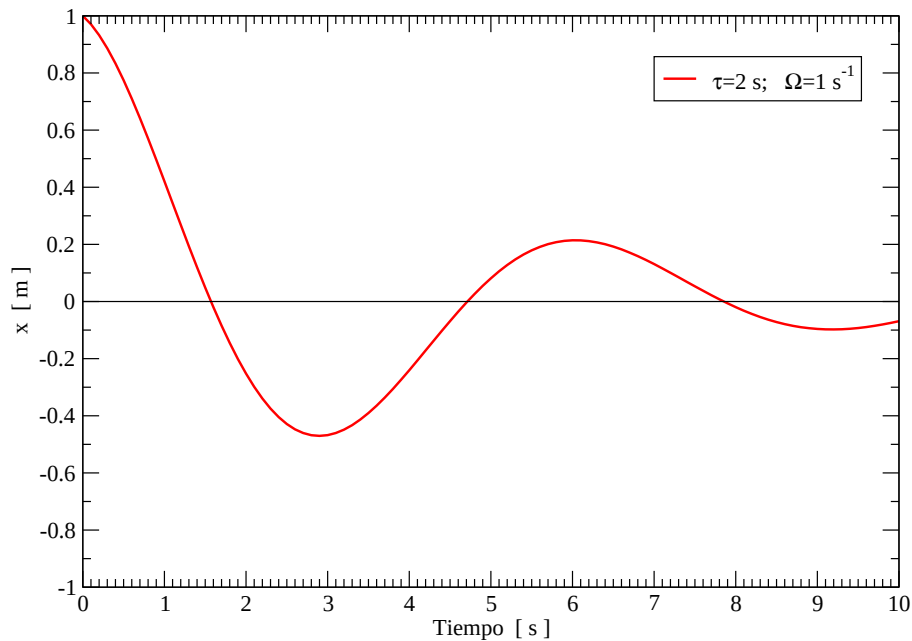
$$x(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_o) ,$$

con

$$\Omega^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 .$$

Nótese que en ausencia de roce ($b = 0$), el tiempo de atenuación τ es infinito, con lo cual $\Omega \rightarrow \omega_o$. El movimiento es armónico simple, sin amortiguación.

En la figura de más abajo se ilustra la posición de un cuerpo oscilando amortiguadamente. Se puede observar la ciclicidad y atenuación del movimiento. En este caso se utilizó $\tau=2$ s, y $\Omega=1$ s⁻¹. Si el cuerpo en cuestión tiene una masa de 10 gramos, ¿cuál sería la constante elástica del resorte y el coeficiente de roce b ?



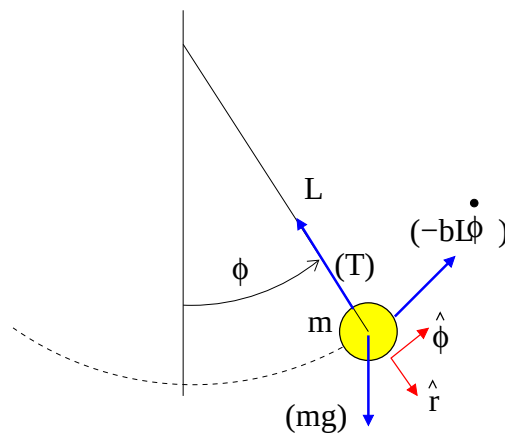
3.5. Péndulo formado por un globo

Consideremos el caso de un péndulo formado por un globo atado a un cordel. La distancia entre el centro del globo y el soporte fijo es L . Son tres las fuerzas que actúan sobre el globo: el peso debido a la gravedad ($m\vec{g}$), la tensión de la cuerda ($\vec{T}$) y el roce viscoso debido al aire ($-b\vec{v}$). La ecuación del movimiento queda:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - b\vec{v}.$$

la descomposición vectorial conveniente es, en este caso, mediante las coordenadas polares. Para un movimiento circular de radio L , la velocidad y aceleración quedan expresadas por

$$\vec{v} = L\dot{\phi}\hat{\phi} \quad \vec{a} = L\ddot{\phi}\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\hat{r}.$$



Proyectando la ecuación del movimiento exclusivamente en la componente angular $\hat{\phi}$, obtenemos

$$mL\ddot{\phi} = -mg \sin \phi - bL\dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} + \omega_o^2 \sin \phi + \frac{1}{\tau^2} \dot{\phi} = 0 .$$

El movimiento resultante es amortiguado pero no armónico: ¿porqué? En el límite de pequeñas oscilaciones podemos aproximar $\sin \phi \approx \phi$, con lo cual el movimiento presenta las mismas características a las del resorte con roce viscoso discutido recientemente. En este caso particular tenemos que

$$\omega_o^2 = \frac{g}{L} , \quad \tau = \frac{m}{b} .$$

3.6. Lectura complementaria

Los temas tratados en esta unidad se pueden encontrar en textos de física básica, en los capítulos donde se aborden oscilaciones, oscilaciones amortiguadas y fluídos.

En el texto de Tipler se encuentra:

- Capítulo 5: fuerzas de arrastre.
- Capítulo 14: oscilaciones amortiguadas.

En el texto de Serway se encuentra:

- Capítulo 6: fuerzas de arrastre.
- Capítulo 13: oscilaciones amortiguadas.