FIA2 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Semestre 2007-2
Unidad 4C - Dinámica plana de sólidos rígidos: torque y momento angular

Por: Rodrigo Soto

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

30 de agosto de 2007

Indice

1. Torque y momento angular para una partícula

Se sabe que la dinámica de una partícula está descrita por la ecuación de Newton

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{1}$$

A partir de la ecuación de Newton se puede encontrar otra ecuación de movimiento, que a veces es más simple de estudiar pero que es más limitada en su aplicación. Para hacerlo consideremos la definición de *momento angular* $\vec{L}$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{2}$$

donde $\times$ es el producto cruz que se definió en la Unidad 3.

Se procede a calcular la derivada de $\vec{L}$. Para eso se recuerda que el producto cruz es una multiplicación de manera que se aplica la regla de la derivada del producto $(d(AB)/dt = (dA/dt)B + A(dB/dt))$. La masa es constante así que resulta

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} \tag{3}$$

pero $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ de lo que resulta que el primer término es $m\vec{v}\times\vec{v}$, que es nulo por las propiedades del producto cruz.

Además, el segundo término puede ser escrito como $\vec{r} \times m\vec{a}$ que, usando la ley de Newton queda

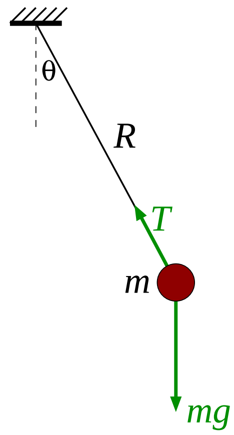
$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4}$$

Esta última es precisamente la definición de torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, obteniéndose la llamada *ecuación de torque* para una partícula.

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{\tau} \qquad (5)}$$

1.1. Ejemplo

Para ver cómo se usa esta ecuación consideremos un péndulo simple de masa m que cuelga de una cuerda ideal de largo R.



El momento angular se obtiene de la definición $L = m\vec{r} \times \vec{v}$. De acuerdo a la Unidad 3 el producto cruz se obtiene como:

> Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores, entonces el elemento
>
> $$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$
>
> es un vector cuya
>
> - dirección es perpendicular a ambos, $\vec{A}$ y $\vec{B}$;
> - tamaño $AB\sin(\theta_{AB})$, con θ_{AB} el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$; y
> - sentido según la regla de la mano derecha

La partícula está a una distancia R del origen y el módulo de la velocidad es $v = R\dot{\theta}$ por ser un movimiento circunferencial. Además, como la velocidad es perpendicular al vector posición se tiene $\sin\theta = 1$. Por último la dirección de $\vec{L}$ es perpendicular a la posición y velocidad, es decir, sale del plano del papel hacia afuera. Si definimos el vector $\hat{k}$ como el que es perpendicular al plano se tiene

$$\vec{L} = mR^2\dot{\theta}\hat{k} \tag{6}$$

Para calcular la derivada de $\vec{L}$ notamos que todas las magnitudes son constantes salvo la velocidad angular $\dot{\theta}$. Luego

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= mR^2\ddot{\theta}\hat{k} \qquad (7) \\ &= mR^2\alpha\hat{k} \qquad (8) \end{aligned}$$

Donde se ha definido la *aceleración angular* $\alpha = \ddot{\theta}$.

Para calcular el toque notamos que sobre la masa actúa su peso $m\vec{g}$ y la tensión de la cuerda $\vec{T}$. El torque es

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{r} \times \vec{T} \tag{9}$$

Como $\vec{T}$ es paralelo al vector posición su torque se anula y sólo queda el peso. Se debe notar que ésta es una de las comodidades del método de torque, pues se pueden eliminar algunas fuerzas del análisis (la tensión en este caso). El torque del peso se obtiene de la definición: la magnitud de $\vec{r}$ es R y el ángulo que forman el peso con el vector posición es θ. Al aplicar la regla de la mano derecha se obtiene que el torque apunta perpendicular al plano, pero hacia adentro. Es decir

$$\vec{\tau} = Rmg \sin\theta(-\hat{k}) \tag{10}$$

Reemplazando todo en (5) se tiene

$$mR^2\ddot{\theta} = -mRg\sin\theta \tag{11}$$

que al simplificar queda

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta \tag{12}$$

que es la misma ecuación de movimiento que se vio en la Unidad 1.

Propuesto:

Considere que el mismo péndulo experimenta además una fuerza de roce viscoso $\vec{F}_v = -\gamma\vec{v}$. Determine, usando el método del torque, la ecuación de movimiento.

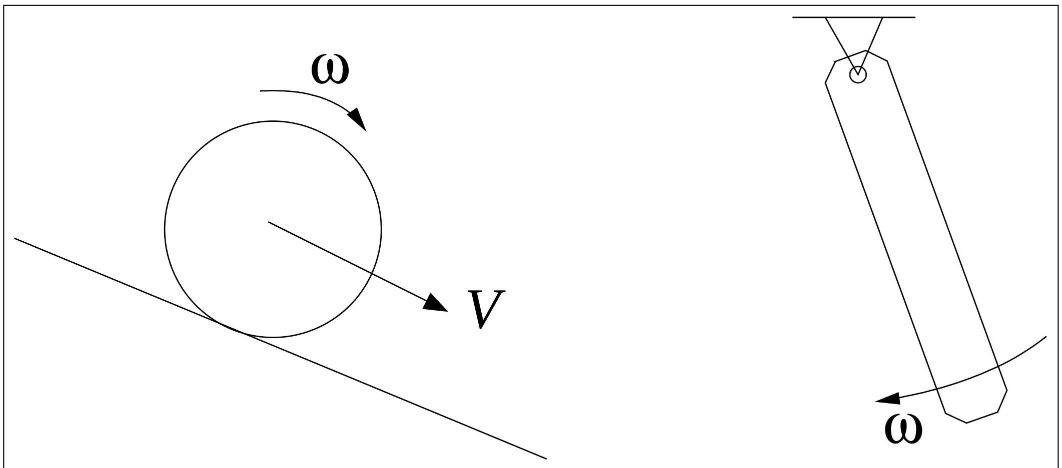
2. Momento angular de un sólido rígido

Si se tiene un sistema de partículas, de masas m_i, posiciones $\vec{r}_i$ y velocidades $\vec{v}_i$, se define el momento angular del sistema como la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \tag{13}$$

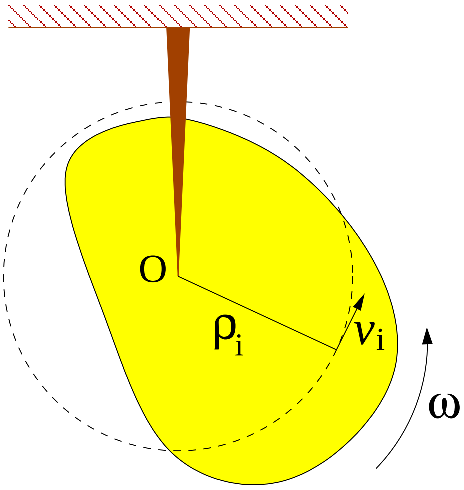
$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{14}$$

En lo que sigue vamos a considerar que el sólido tiene un *movimiento plano*. Es decir, la velocidad del sólido está en un plano (movimiento bidimensional) y la rotación ocurre con un eje perpendicular al plano de movimiento. Además, en este capítulo consideraremos sólo el movimiento de rotación en torno a un punto fijo.



Ejemplos de movimientos planos. En el ejemplo de la izquierda el sólido se traslada y el eje de rotación es perpendicular a la traslación. En el ejemplo de la derecha el movimiento es sólo de rotación en torno al punto fijo.

En el caso de tener un sólido rígido que gira en torno a un punto fijo O (tal como los descritos en la Unidad 3 y Unidad 4B), se puede descomponer el sólido en N partículas individuales y luego se hace tender $N \to \infty$. Como es un sólido rígido, la distancia de cada una de estas partícula al punto fijo es constante ρ_i, describiendo un movimiento circular de ese radio en torno al punto fijo.



Si la velocidad angular del sólido en torno a O es ω, entonces la rapidez de cada punto es $v_i = \rho_i \omega$, perpendicular al vector posición. Luego, se tiene

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \rho_i \rho_i \omega \hat{k} = \rho_i^2 \omega \hat{k} \tag{15}$$

De esta forma, el momento angular total del sólido que rota en torno a un punto fijo es

$$\begin{aligned}
\vec{L}_O &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i && (16)\\
&= \sum_i m_i \rho_i^2 \omega \hat{k} && (17)\\
&= \left(\sum_i m_i \rho_i^2\right) \omega \hat{k} && (18)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{L}_O = I_O \vec{\omega} \qquad (19)}$$

donde se ha puesto el subíndice "O" para indicar explícitamente que se mide el momento angular respecto al punto fijo. Al pasar de la tercera a la cuarta línea se identificó el *momento de inercia* respecto al punto fijo O. Además, se definió la velocidad angular vectorial $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ como el vector que tiene la maginitud $\omega = \dot{\theta}$ y cuya dirección está dada por el eje de giro y sentido por la regla de la mano derecha.

Se obtiene entonece que el momento angular total de un sólido es proporcional a su momento de inercia, que es una propiedad intrínseca del cuerpo, y a la velocidad angular que mide el estado de rotación en cada instante. Esta relación es análoga a la del mometum lineal $\vec{p} = m\vec{v}$, donde m es una propiedad intrínseca del cuerpo y $\vec{v}$ mide el estado de traslación en cada instante.

3. Ecuación de torque para un sólido rígido

Se puede calcular la derivada del momento angular usando las expresiones (13) y (19). De acuerdo a la primera expresión se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \sum_i \dot{\vec{L}}_i && (20)\\
&= \sum_i \vec{\tau}_i && (21)\\
&= \vec{\tau}_{\text{total}} && (22)
\end{aligned}$$

donde $\vec{\tau}_i$ es el torque sobre cada partícula y $\vec{\tau}_{\text{total}}$ es la suma de los torques.

Por otro lado usando la segunda expresión se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt}(I_O \vec{\omega}) && (23)\\
&= I_O \dot{\vec{\omega}} && (24)\\
&= I_O \ddot{\theta} \hat{k} && (25)
\end{aligned}$$

donde se ha usado que el momento de inercia es una propiedad del sólido y si éste es rígido, entonces es constante en el tiempo.

Igualando las dos expresiones se tiene

$$I_O\dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}_{\text{total}} \tag{26}$$

$$I_O\ddot{\theta}\hat{k} = \vec{\tau}_{\text{total}} \tag{27}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación de Newton $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{total}}$ donde I_O juega el rol de la masa asociada al movimiento de rotación. La aceleración angular (cambio en la velocidad angular) es producida por los torques sobre el cuerpo. Dado un torque fijo, un cuerpo de mayor momento de inercia tendrá una menor aceleración angular. Es decir, el momento de inercia indica la dificultad para cambiar (acelerar o frenar) el estado de rotación de un cuerpo.

Propuestos:

Se tienen dos discos de masa M y radio R, uno de ellos con la masa distribuida uniformemente y el otro con la masa sólo en la circunferencia exterior. Si se aplica el mismo torque τ sobre ambos discos, cual acelererá más.

Para los mismos discos anteriores, si ambos están girando con velocidad angular ω. ¿Al cuál se le debe aplicar un mayor torque para que ambos se frenen en el mismo tiempo?

4. Torque sobre un sólido rígido

Para resolver la ecuación de movimiento recién encontrada se debe calcular el torque total sobre el cuerpo, el cual es la suma de los torques sobre cada una de las partículas $\vec{\tau}_i$. Vamos a ver que en general no es difícil de calcular. Para eso desarrollaremos la teoría general.

Sea un sólido que está descrito como sistema de N partículas de masas m_i y posiciones $\vec{r}_i$. En general sobre cada una de las partículas se ejercerán fuerzas provenientes de las otras partículas del sólido (por ejemplo, las fuerzas moleculares que lo mantienen rígido) y fuerzas que son ejercidas por otros cuerpos. A las primeras se les llamará *fuerzas internas* y se denotará por $\vec{f}_{ik}$ la fuerza que la partícula k le ejerce a la partícula i. Al segundo tipo de fuerzas se les llama *fuerzas externas* y se les denotará por $\vec{F}_i^{\text{ext}}$. Así la fuerza total sobre la partícula i es

$$\vec{F}_i = \sum_k \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i^{\text{ext}} \tag{28}$$

El torque sobre la partícula i es entonces

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_i &= \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad (29)\\ &= \sum_k \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\rm ext} \qquad (30)\end{aligned}$$

El torque total tiene una componente interna y otra externa. Calculemos primero la componente interna:

$$\vec{\tau}_{\rm total}^{\rm int} = \sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} \qquad (31)$$

Como los índices son mudos, también se puede escribir

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{\rm total}^{\rm int} &= \sum_i \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_{ki} \qquad (32)\\ &= -\sum_i \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_{ik} \qquad (33)\end{aligned}$$

donde para pasar de la primera a la segunda línea se usó el principio de acción y reacción, $\vec{f}_{ki} = -\vec{f}_{ik}$. Como (31) y (33) son válidas, el torque interno se puede escribir también como el promedio de las dos expresiones

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{\rm total}^{\rm int} &= \frac{1}{2}\left(\sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} - \sum_i \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_{ik}\right) \qquad (34)\\ &= \frac{1}{2}\sum_i \sum_k (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{f}_{ik} \qquad (35)\end{aligned}$$

El vector $\vec{r}_{ik} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_k$ es paralelo a la línea que une los centros de las partículas. Por otro lado, se sabe que las fuerzas fundamentales de la naturaleza (electromagnetismo, gravitación, fuerzas atómicas, fuerzas nucleares,...) cumplen con la propiedad que la dirección de la fuerza es paralela a la línea que une los centros de las partículas (por ejemplo, la fuerza de gravitación universal es $F_{ik} = -Gm_1m_2\hat{r}_{ik}/r_{ik}^2$). Debido a esa propiedad, los productos cruz en (35) son todos nulos.

En consecuencia, el torque total de las fuerzas internas es nulo. Esta propiedad es muy importante porque implica (de acuerdo a la ecuación (26)) que las fuerzas internas no provocan aceleración angular. Dicho de otra forma, un cuerpo no se pone a girar de manera espontánea.

Volviendo al torque total, sólo queda la componente externa

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{\rm total} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\rm ext} \qquad (36)\\ \vec{\tau}_{\rm total} &= \vec{\tau}_O^{\rm ext} \qquad (37)\end{aligned}$$

donde se deja explícita la indicación que el brazo de los torques se mide respecto al punto fijo O.

5. Resumen

En resumen, la ecuación de torque para un sólido rígido respecto a un punto fijo O se escribe de las siguientes maneras

$$\boxed{\begin{aligned} I_O\dot{\vec{\omega}} &= \vec{\tau}_O^{\text{ext}} \quad (38)\\ I_O\ddot{\theta}\hat{k} &= \vec{\tau}_O^{\text{ext}} \quad (39)\end{aligned}}$$

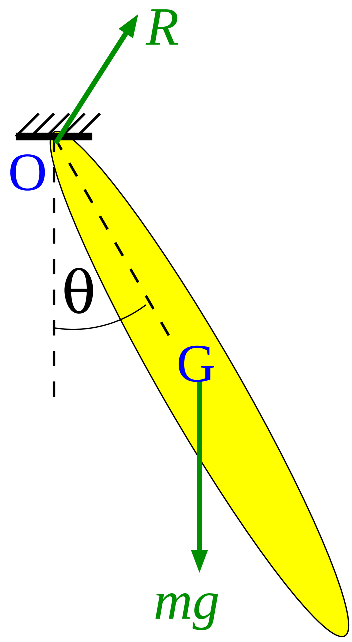
donde I_O es el momento de inercia del cuerpo respecto a su punto fijo y

$$\boxed{\vec{\tau}_O^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (40)}$$

6. Ejemplos

6.1. Movimiento del péndulo físico

Se llama péndulo físico al caso de un sólido rígido que puede girar libremente respecto a un punto fijo bajo la acción de la gravedad.



En la figura se representa el péndulo físico que está sujeto del punto fijo O. El centro de masa del cuerpo está indicado por una G. Las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo son su peso $m\vec{g}$ y la fuerza de sujeción en el punto fijo $\vec{R}$. Esta fuerza, también llamada de reacción es la que impide que el cuerpo caiga (por eso tiene una componente vertical), como también impide que el punto O se mueva hacia los lados (por eso, tambien tiene una componente horizontal). De esta forma, la fuerza de reacción tiene una magnitud y dirección en principio desconocidas que se deben determinar de las ecuaciones de movimiento.

La fuerza de reacción actúa en el punto O. Luego, su torque es nulo pues el brazo es nulo. Aquí nuevamente se ve la utilidad del método de torques porque permite describir el movimiento eliminando las fuerzas desconocidas.

El torque de las fuerzas externas se reduce entonces al torque del peso, que como se vio en la Unidad 4A, actúa sobre el centro de masa del cuerpo.

$$\vec{\tau}_O^{\text{ext}} = \vec{\tau}_O^{mg} \quad (41)$$

$$= -mgR_G \sin\theta\hat{k} \quad (42)$$

donde R_G es la distancia del centro de masa al punto fijo y el signo se obtuvo de la regla de la mano derecha.

La ecuación de movimiento es entonces

$$I_O\ddot{\theta} = -mgR_G \sin\theta \quad (43)$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{mgR_G}{I_O}\right)\sin\theta \quad (44)$$

ecuación que es muy parecida a la del péndulo simple, pero ahora depende de la forma del cuerpo a través del momento de inercia.

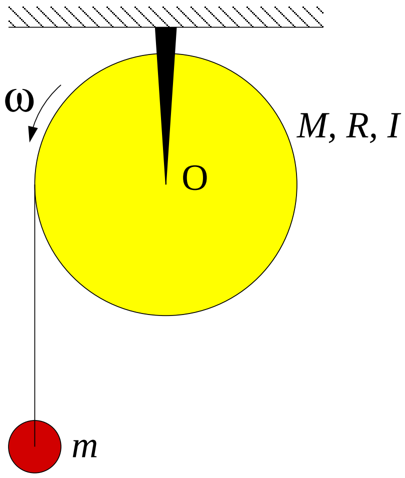
Propuesto:

Encuentre la ecuación de movimiento de un péndulo físico formado por una barra de largo L y masa m, que cuelga de un extremo.

¿La aceleración angular es mayor o menor que la un péndulo simple? ¿Por qué?

6.2. Polea con masa

Considere una polea de masa M, radio R y momento de inercia I que está sujeta por su centro en O. De la polea cuelga una cuerda ideal en cuyo extremo está sujeta una masa m. Se busca saber cómo gira la polea.



Sobre la polea actúan tres fuerzas externas: su peso $m\vec{g}$, la reacción del soporte en O $\vec{R}$ y la tensión de la cuerda $\vec{T}$. Las dos primeras fuerzas no ejercen torque respecto al punto fijo O pues su brazo es nulo. La tensión se aplica en el extremo del círculo, a una distancia R del centro. Como el vector que va del punto O al punto de aplicación es perpendicular a la tensión, el brazo es simplemente R. Por último el sentido del torque es, de acuerdo a la regla de la mano derecha, un vector que sale del plano hacia afuera (según $\hat{k}$). Luego

$$\vec{\tau}_O^{\text{ext}} = RT\hat{k} \tag{45}$$

Se debe notar que si la cuerda hubiera estado sujeta en el borde derecho del círculo, el torque habría sido $-RT\hat{k}$.

Luego, la ecuación de movimiento de la polea es

$$I_O\alpha = RT \tag{46}$$

El movimiento de la masa m se determina de la ecuación de Newton. Tomando el eje y vertical hacia arriba se tiene

$$ma = T - mg \tag{47}$$

Se tiene, además, la relación cinemática

$$a = -R\alpha \tag{48}$$

donde el sigo "-" aparece porque cuando la polea gira en su sentido positivo, la masa baja (es decir, se mueve en sentido negativo).

Reemplazando (48) en (47) se obtiene

$$T = mg - mR\alpha \tag{49}$$

que al reemplazar en (46) da

$$\alpha = \frac{mgR}{I_O + mR^2} \tag{50}$$

que muestra que la polea acelera debido al torque de la masa que cuelga. Un mayor momento de inercia provoca que la polea acelere más lentamente debido a que cuesta más hacer girar a la polea.

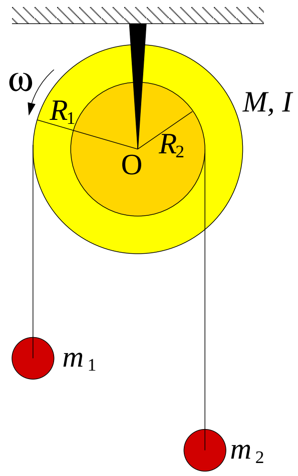
La aceleración de la masa m es

$$a = -R\alpha \tag{51}$$
$$= -\frac{g}{1 + I_O/MR^2} \tag{52}$$

lo que indica que acelera más lento que g. Nuevamente, esto es producto de la inercia de la polea.

Propuesto:

Determine la aceleración angular de una polea que tiene dos radios donde se enrollan las cuerdas y de la que cuelgan dos masas. Indique la condición crítica para que la polea gire en uno u otro lado.



.

7. Lecturas Recomendadas

Como los capítulos de los libros cambian de edición en edición, no es posible dar una indicación general de cual capítulo leer.

Sin embargo, para las ediciones que están en la biblioteca se recomienda.

- Serway, Secciones 10.6, 10.7, 11.1, 11.2, 11.3 y 11.4
- Tipler y Mosca, Física para la Ciencia y la Ingeniería, Secciones 9.3, 9.4, 9.5, 10.1 (opcionales 10.2 y 10.3)
- Cualquier libro de Física en los capitulos de Rotacion o Dinámica Plana de Sólidos Rígidos.