Fi1A2 - SISTEMAS NEWTONIANOS
Semestre 2007-2

Unidad 7A - Presión colisional

Por: Hugo F. Arellano

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
http://www.dfi.uchile.cl

2 de noviembre de 2007

Indice

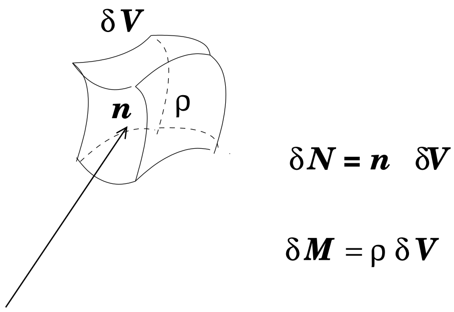
7.1. Introducción

En esta unidad estudiaremos la fuerza que ejerce un conjunto de partículas cuando rebotan en una superficie. Partiremos con nociones simples acerca de rebotes de partículas y construiremos un modelo más elaborado para cuantificar el rebote de un chorro de ellas.

Lo interesante de este modelo es que nos permite hacerlo extensivo a diversos sistemas de nuestro entorno. Por ejemplo, entender la fuerza de un gas sobre las paredes de su contenedor; la fuerza de arrastre del aire sobre un globo cuando se mueve rápidamente; la fuerza del viento; la fuerza que ejerce una cadena al caer sobre el suelo; el rol de las aspas de un helicóptero para que vuele; la fuerza que ejerce el chorro de una mangera; etc.

Conviene introducir algunas nociones que nos serán útiles en la discusión que sigue. La primera de estas es la *densidad de partículas*, denotada por n, que corresponde al número de partículas por unidad de volumen. Así, si $n(\vec{r})$ es el número de partículas por unidad de volumen en la posición $\vec{r}$, entonces el número de partículas δN en un pequeño volumen de tamaño δV que abarca $\vec{r}$ está dado por

$$\delta N = n(\vec{r})\,\delta V \ .$$



Al igual que el caso anterior, podemos definir la emphdensidad de masa, que denotaremos por ρ. De esta forma, la masa δM contenida en un pequeño volumen de tamaño δV estará dado por

$$\delta N = n(\vec{r})\,\delta V \ .$$

Ciertamente ρ puede depender de la posición, lo que se representa por $\rho = \rho(\vec{r})$.

Si todas las partículas son de igual masa, m_o, entonces

$$\rho = m_o\,n \ ,$$

7.2. Colisiones elementales

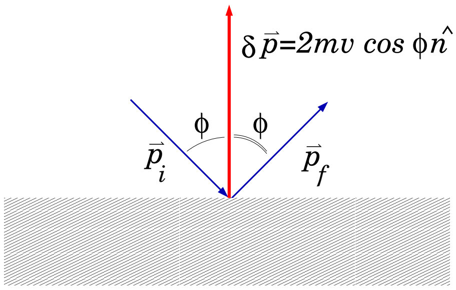
Cuando una partícula con cierto momentum rebota en una superficie, ésta experimenta un cambio de momentum. El momentum transferido a la partícula es

$$\delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \ ,$$

donde $\vec{p}_i$ y $\vec{p}_f$ son los momenta inicial y final, respectivamente. Si el rebote es elástico, con la partícula incidiendo con rapidez v, entonces la variación de momentum está dada por

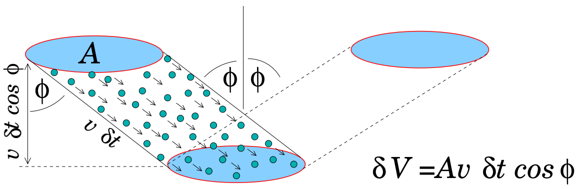
$$\delta\vec{p} = 2m_o v\cos\phi\;\hat{n} \ ,$$

con ϕ el ángulo de incidencia con respecto a la normal $\hat{n}$ del plano del rebote y m la masa de la partícula.



Este cambio de momentum es el que la superficie le imprime a la partícula, siendo su origen la interacción (fuerza) percusiva que la superficie ejerce sobre la partícula (que por la 3ra ley de Newton, es igual y opuesta a la que la partícula le imprime a la superficie).

La situación interesante ocurre cuando una lluvia de partículas rebota sobre la misma superficie. Para simplificar la discusión, supondremos que existen n partículas por unidad de volumen, las cuales se mueven con igual velocidad de incidencia sobre una superficie plana.



En este caso cuantificaremos el momentum neto $\delta \vec{P}$ que imprime la superficie a las partículas en un lapso δt. En la figura se ilustra un chorro de partículas que incide sobre la superficie. En ella se muestran las partículas que colisionarán la superficie entre el instante t y $t + \delta t$. El cambio de momentum será igual al cambio experimentado por una de las partículas, multiplicado por el número de ellas que colisionarán la pared. Tal número, que denotaremos δN, está dado por

$$\delta N = n \times \text{Vol} = n \times A\ v\ \delta t \cos\phi\ .$$

Entonces, el cambio de momentum experimentado por todas las partículas que golpean (en el lapso δt) es

$$\begin{aligned} \delta \vec{P} &= (n\ A\ v\delta t \cos\phi) \times (2m_o v \cos\phi\ \hat{n}) \\ &= 2\underbrace{m_o n}_{\rho}\ A\ v^2 \cos^2\phi\ \hat{n}\ \delta t\ . \end{aligned}$$

Identificamos entonces la fuerza media responzable del cambio de momentum de las partículas rebotando:

$$\vec{F}_{col} = 2\rho\ A\ v^2 \cos^2\phi\ \hat{n}\ .$$

Denotando por $A_\perp = A\cos\phi$, la sección transversal del chorro de partículas, entonces

$$\vec{F}_{col} = 2\rho\ A_\perp\ v^2 \cos\phi\ \hat{n}\ .$$

Observamos que la fuerza de la superficie sobre el chorro es proporcional a:

- la densidad de masa del chorro;
- el cuadrado de la rapidez;
- la sección tranzversal del chorro;
- al coseno del ángulo de incidencia c/r a la normal.

En el caso de un chorro de partículas que incide perpendicularmente sobre una superficie, la fuerza es

$$F_\perp = 2\rho\ A_\perp\ v^2\ .$$

Podemos estimar la fuerza que ejerce un viento de 60 km/h sobre una placa de 1 m^2. Tomando $v=$ 60 km/h$\approx$ 17 m/s, $\rho\approx$ 1 kg/m^3, estimamos $F_\perp\approx$ 580 N, equivalente a una masa de 58 kg.

7.2.1. La presión colisional

Volviendo a la expresión $\vec{F}_{col} = 2\rho\ v^2\cos^2\phi\ \hat{n}$, observanos que

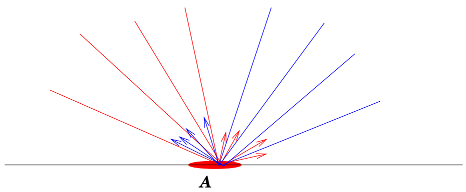
$$p \equiv \frac{F_{col}}{A} = 2\rho\ A\ v^2\cos^2\phi$$

que expresa la fuerza por unidad de área que ejerce el chorro al incidir las partículas. A esta cantidad se le denomina *presión*, y dimensionalmente se expresa como `fuerza/área`. El el sistema internacional, una unidad de presión se expresa en N/m^2, correspondiente a 1 pascal:

$$1\ \mathrm{N/m^2} = 1\ \mathrm{pascal} = 1\ \mathrm{Pa}$$

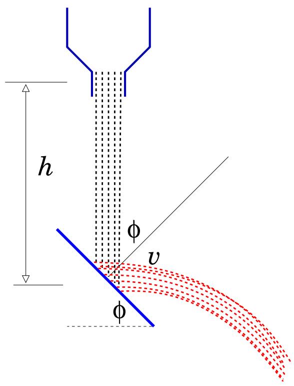
La presión es una cantidad física muy útil para caracterizar la manifestación mecánica de un medio fluído. En nuestro modelo es el resultado del cambio de momentum de partículas en movimiento. En este modelo, las partículas son monoenergéticas (todas chocan con la misma energía cinética) y colimadas (todas ellas se mueven en la misma direccón).

En el caso del aire, las partículas que golpean un pequeño elemento de superficie provienen de todas las direcciones dentro de medio hemisferio. Además, las partículas no son monoenergéticas sino se distribuyen probabilisticamente. El cálculo de la presión en este caso requiere de herramientas que van más allá de las que se cuentan a este nivel. El origen microscópico de la presión es el mismo que hemos introducido en esta unidad.



7.3. Fuerza al desviar un chorro de partículas

Una aplicación directa del resultado anterior es el estudio de un chorro de partículas que golpea un plano inclinado al caer por gravedad. La deducción anterior para la magnitud de la fuerza del plano inclinado para desviar las partículas en sus impactos, $F_{col} = 2\rho\ A_{\perp}\ v^2 \cos\phi$, indica que ella es proporcional al cuadrado de la rapidez del impacto, al coseno del ángulo de inclinación, a la sección transversal del flujo y a la densidad de éste.



Una manera de constatar la proporcionalidad con v^2 es midiendo la fuerza sobre la superficie inclinada y analizar su comportamiento con la altura de caída de granos que caen desde un embudo. Por conservación de energía tenemos que $v^2 = 2gh$, con g la aceleración de gravedad y h la distancia entre el punto de impacto de los granos y el embudo. Así,

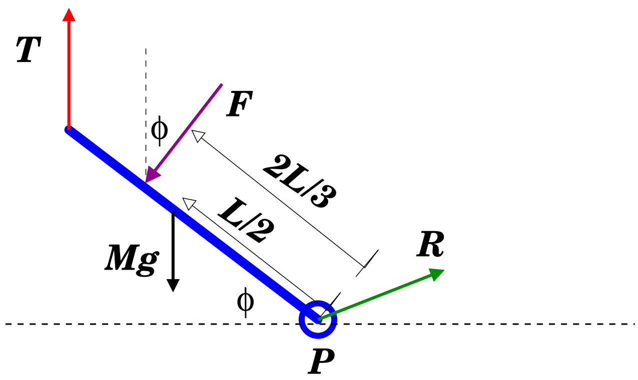
$$F_{col} = (4\rho\, A_{\perp}\ g\ \cos\phi)\ h \qquad (7.3.1)$$

$$= (4\rho\, A_{\perp}\ g\ h)\ \cos\phi \qquad (7.3.2)$$

La primera de ellas expresa proporcionalidad con respecto a la altura de caída. La segunda expresa la proporcionalidad con respecto a $\cos\phi$. Se plantea determinar los rangos de variación de h y ϕ para los cuales las expresiones anteriores son razonablemente válidas. ¿Cómo medir $nA_\perp$ a partir de una imagen?

7.4. Rebotes en una placa inclinada

En la figura de más abajo se ilustran las fuerzas que actúan sobre una placa inclinada de peso $M\vec{g}$, sujeto por un cordel vertical ($\vec{T}$), percutido por un chorro de granos ($\vec{F}$), y soportado por un pivote en P ($\vec{R}$).



Si el sistema es estático, entonces al imponer torque neto nulo con respecto a P tenemos

$$LT\cos\phi - \frac{2L}{3}F - \frac{L}{2}Mg\cos\phi = 0 \quad \rightarrow \quad (T - \frac{1}{2}Mg)\cos\phi = \frac{2}{3}F\ .$$

Si denotamos por T_o la tensión que ocurre cuanfo $F = 0$,

$$T_o = \frac{1}{2}Mg\ ,$$

entonces

$$F = \frac{3}{2}(T - T_o)\ \cos\phi\ .$$

Si aceptamos que la fuerza $F \rightarrow F_{col}$, entonces

$$4\rho\, A_\perp h\ g\ \cos\phi = \frac{3}{2}(T - T_o)\ \cos\phi \quad \rightarrow \quad (T - T_o) = \frac{8}{3}\ (\rho\, A_\perp h)\ \ g\ .$$

Definamos la constante B por

$$B = \frac{8\,\rho\,A_{\perp}g}{3}\ ,$$

entonces

$$(T - T_o) = Bh\ .$$

Este resultado de forma bastante sencilla es consistente con el hecho de que la rapidez del impacto en la placa es proporcional a v^2. Además, la ausencia de la dependencia en el ángulo ϕ es por la orientacion vertical del cordel que soporta la placa. Las relaciones algebraicas permiten la cancelación de $\cos\phi$ provenientes de F_{col}. El objetivo de esta unidad es investigar la validez de esta relación.

7.5. Preguntas de comprensión

1. ¿En qué unidades se expresa B?
2. Estime la densidad de alumnos en la Sala Galileo, de superficie 300 m^2; estime la densidad de masa correspondiente.
3. Estime la fuerza de una granizada sobre un paraguas plano horizontal.
4. ¿Cuál sería el ángulo de rebote de una partícula incidiendo con un ángulo ϕ si la energía cinética del rebote es λ veces la inicial?
5. Cuál es el significado físico de $T - T_o$?
6. ¿En qué unidades se expresa ρv?
7. Estime la fuerza que ejerce viento de 100 km/h sobre la pared de una casa de 2,5 m de altura y 5 m de ancho.
8. Un chorro de partículas de densidad de masa ρ (1 kg/m^3) se mueve con velocidad v (1 m/s) a lo largo de una manguera. Para doblar la manguera en un ángulo β (30^o), ¿que fuerza es necesaria aplicar?
9. ¿Qué caracteriza a un chorro monoenergético y colimado de partículas?
10. Estime el tiempo que dura la colisión de un puñado de porotos cuando estos son soltados desde 50 cm de altura.
11. Defina la densidad de partículas n e ilustre con un ejemplo.
12. Defina la densidad de masa ρ e ilustre con un ejemplo.