FIA2 – Sistemas Newtonianos
Semestre 2007-2

Unidad 4D – Dinámica Plana III
Movimiento de Rodadura

René D. Garreaud
Departamento de Geofísica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

0. Notación en este Apunte

Los escalares (masa, energía, etc.) se escriben en *cursiva*, tanto en mayúsculas como minúsculas (m, K, etc.), o empleando una letra de alfabeto Griego (ω, δ, etc). Las cantidades escalares se escriben en **negrita** (**F**, **dv**, etc). La multiplicación entre escalares se denota con un pequeño punto (·), el producto cruz por una cruz (×) y el producto punto por un asterisco (*).

1. Usted ya sabe….

En la unidad 4C –Torque y Momento Angular- ud. conoció las leyes de la dinámica plana aplicadas a un cuerpo rígido que rota en torno a un eje fijo que pasa por un punto 0:

$$\boldsymbol{\tau}^{ext}{}_{O} = d\mathbf{L}_O/dt = I_O\cdot\boldsymbol{\alpha} \qquad (1)$$

Donde $\boldsymbol{\tau}^{ext}{}_{O}$ es la suma de los torques producidos por las fuerza externa $\mathbf{F}_i$ respecto al eje O, es decir: $\boldsymbol{\tau}^{ext}{}_{O} = \sum \mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i$. $\mathbf{L}_O$ es el momento angular total del sólido con respecto a O e I_O es nuestro querido momento de inercia del cuerpo con respecto a O y $\boldsymbol{\alpha}$ es la aceleración angular: $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt = d^2\boldsymbol{\theta}/dt^2$. Notar que tanto el torque como la aceleración angular son magnitudes vectoriales, en la dirección normal al plano de movimiento. En general se emplea la convención de la mano derecha para decidir su signo.

Notar además la equivalencia de $\boldsymbol{\tau}^{ext}{}_{O} = I_O\cdot\boldsymbol{\alpha}$ para la dinámica de un sólido rígido con $\mathbf{F}^{ext} = m\cdot\mathbf{a}$ para la dinámica de una partícula. Finalmente, recuerde que para calcular el momento de inercia con respecto a un eje arbitrario muchas veces se debe emplear el **teorema de Steiner** (unidad 4B) suponiendo conocido el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa del cuerpo.

2. Movimiento de Rodadura de un cuerpo rígido

Consideremos un cilindro de radio R que se mueve sobre una superficie plana. En un cierto intervalo Δt el cilindro gira un ángulo $\Delta\theta$ y su centro de masa se desplaza una cierta distancia Δs. El ángulo $\Delta\theta$ implica un desplazamiento $R\cdot\Delta\theta$ -medido en unidades de longitud- de los puntos en la periferia del cilindro (Figura 1).

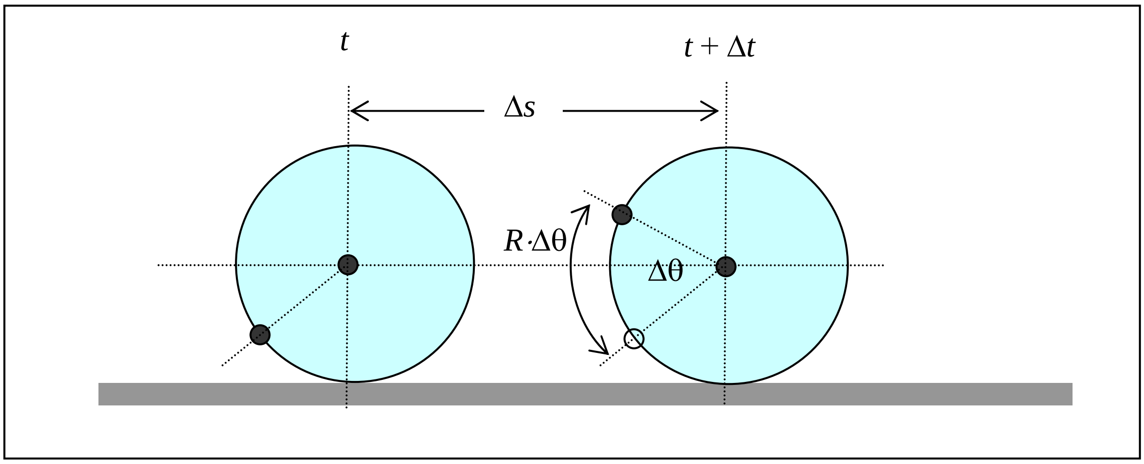


Figura 1: Movimiento del centro de masa y un punto en la periferia de un cilindro que rueda sobre una superficie horizontal.

El valor $R\cdot\Delta\theta$ puede ser mayor, igual o menor que Δs, pero existen dos casos límites muy importantes:

- **Resbalamiento puro: $\Delta s>0$ (CM se desplaza) y $\Delta\theta = 0$ (cilindro no gira).**
- **Rodadura perfecta: $\Delta s = R\cdot\Delta\theta$**

El resbalamiento ocurre cuando no existe roce entre el cilindro y la superficie. La rodadura perfecta necesita que exista roce, es decir, una superficie rugosa.

<u>En esta unidad estudiaremos la rodadura perfecta, también referida como rodar sin resbalar</u>. En primer lugar, notemos que podemos asignar vectores a las cantidades Δs y $\Delta\theta$, y luego tomar la derivada de la relación $\Delta s = R\cdot\Delta\theta$ (es decir, hacemos $\Delta t\rightarrow 0$) obteniendo:

Rodadura Perfecta	
$\Delta\mathbf{s} = R\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}$	(2a)
$\mathbf{v}_{cm} = d\mathbf{s}/dt = R\cdot d\boldsymbol{\theta}/dt = R\cdot\boldsymbol{\omega}$	(2b)
$\mathbf{a}_{cm} = d\mathbf{v}_{cm}/dt = R\cdot d\boldsymbol{\omega}/dt = R\cdot\boldsymbol{\alpha}$	(2c)

Estas relaciones vinculan la cinemática del centro de masa (aquellas con subíndice cm) con la cinemática de la rotación.

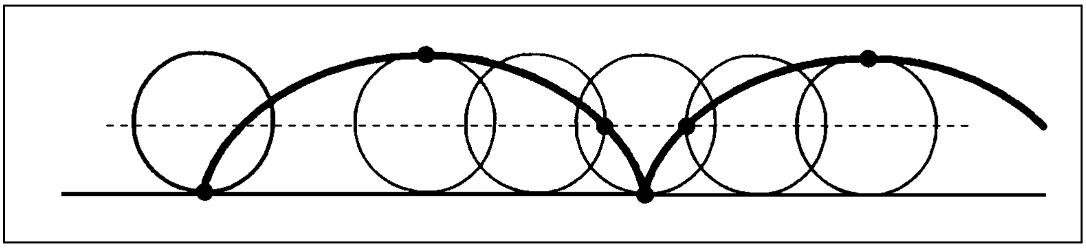


Figura 2. La trayectoria del centro de masa es simple, pues este se desplaza en línea recta. La trayectoria de un punto en la periferia es más complicada y se denomina cicloide.

Un aspecto importante de la rodadura perfecta es saber en torno a cual punto se produce la rotación. Para eso considere la figura 3, en la cual se han dibujado los vectores velocidad (lineal) en distintos puntos del cuerpo que esta rodando. Experimentalmente esto se puede hacer marcando algunos puntos sobre el disco y tomando 2 fotografías separadas por un breve intervalo de tiempo δt. Para cada punto podemos determinar su desplazamiento d$\boldsymbol{r}$ y de allí su velocidad cuasi-instantánea como $\mathbf{v} \approx d\boldsymbol{r} / \delta t$.

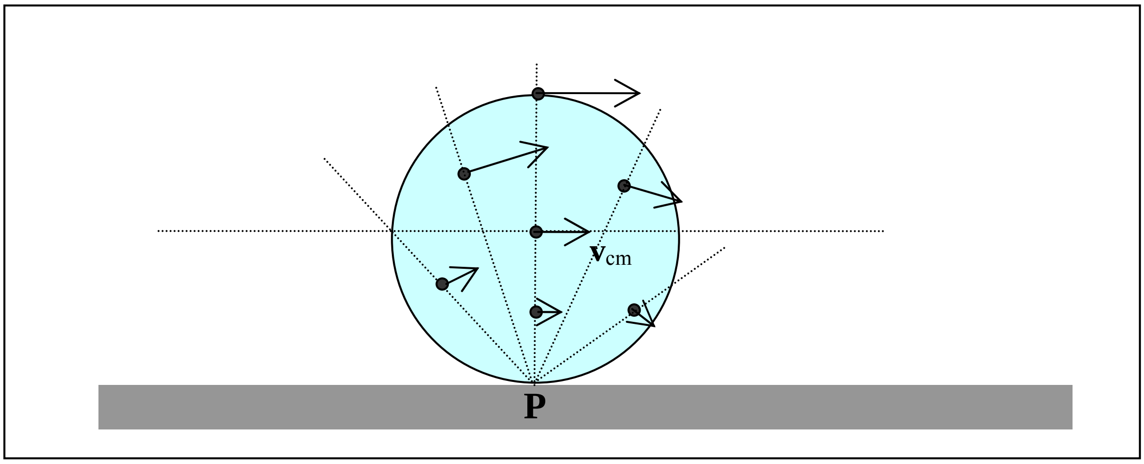


Figura 3. Vectores velocidad instantánea en distintos puntos sobre un cilindro que rueda sin resbalar.

Todos los puntos se mueven en una dirección perpendicular a un eje que pasa por el punto de contacto P del disco con la superficie. En particular, la velocidad del centro de masa es $\mathbf{v}_c$, la de un punto en la periferia superior es $2\mathbf{v}_c$, pero a medida que nos acercamos a P la velocidad va disminuyendo hasta que $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$. Entonces, hemos encontrado que:

En rodadura perfecta, el punto de contacto P es el centro de rotación y este se encuentra en reposo instantáneo.

Es importante enfatizar este carácter "instantáneo", pues un punto real sobre la periferia del disco, en algún momento se convertirá en el punto de contacto pero rápidamente dejara de serlo.

3. Dinámica de la rodadura perfecta

Habiendo establecido la cinemática de la rodadura perfecta, podemos ahora escribir las sus ecuaciones dinámicas:

$$\sum \mathbf{F}^{ext} = M \cdot \mathbf{a}_{cm} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\tau}^{ext}{}_P = d\mathbf{L}_P/dt = I_P \cdot \boldsymbol{\alpha} \tag{4a}$$

Ambas ecuaciones son vectoriales. En el caso de la geometría plana que estamos considerando, la ecuación (3) da lugar 2 ecuaciones escalares al proyectar las fuerzas sobre 2 ejes perpendiculares (x e y), en tanto la ecuación (4) da lugar a una sola ecuación escalar pues todos los torques están en la dirección normal al plano del movimiento (z) con su signo respectivo.

<u>Notemos que hemos escrito la ecuación de torque respecto al eje que pasa por el punto instantáneo de contacto P</u>. En forma más general, se puede escribir la ecuación de torque-momento angular en torno a cualquier punto Q como:

$$d\mathbf{L}_Q/dt = \boldsymbol{\tau}^{ext}{}_Q - \mathbf{v}_Q \times M \cdot \mathbf{v}_{cm} \tag{4b}$$

Este resultado se demuestra en anexo A. La ecuación (4b) no tiene la simpleza de (4a) puesto que junto al torque de las fuerzas con respecto a Q aparece un término adicional. Naturalmente, si Q = P → $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ y recuperamos la ecuación (4a).

Hay un segundo caso en que la ecuación (4b) se simplifica que corresponde a Q = Centro de Masa. En este caso $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_{cm}$ y $\mathbf{v}_Q \times M \cdot \mathbf{v}_{cm} = \mathbf{0}$, obteniendose

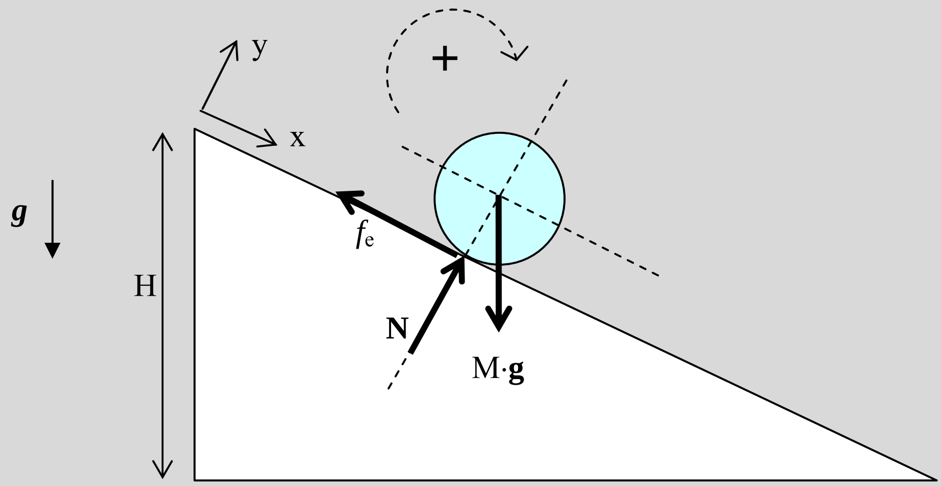
$$\boldsymbol{\tau}^{ext}{}_{cm} = d\mathbf{L}_{cm}/dt = I_{cm} \cdot \boldsymbol{\alpha} \tag{4c}$$

La ventaja de (4c) es que I_{cm} es usualmente conocido y se cumple independiente de cuan complicado sea el movimiento del Centro de Masa.

Ejemplo (muy importante parta la experiencia práctica)

Considere una esfera sólida de masa M y radio R ($I_{cm} = (2/5)\cdot M\cdot R^2$) que rueda por un plano inclinado (ángulo γ con la horizontal). Determine la velocidad del centro de masa cuando la esfera ha bajado una altura H.

Para determinar la velocidad final, debemos conocer la aceleración del centro de masa. Apliquemos las ecuaciones 3-4c al sistema que se muestra en la figura. Partimos por hacer un DCL. *Como vamos a calcular torques es muy importante poner las fuerzas donde están actuando.*



Como se trata de rodadura perfecta tiene que existir roce entre la esfera y el plano. Como el punto P de contacto esta en reposo instantáneo, en este caso se trata de roce estático ($|\mathbf{f}_e| \leq \mu_e\, |\mathbf{N}|$). Falta determinar su sentido. Para lograr la rodadura a favor de los punteros del reloj (consistente con la esfera bajando) el roce tiene que ser plano arriba, pues en este caso y respecto al CM el roce es la única fuerza capaz de generar el torque que produce la rodadura. La existencia de roce estático en rodadura perfecta es un resultado general, aunque en otros problemas su sentido puede ser distinto dependiendo de que existan o no otras fuerzas.

Ahora escribimos las ecuaciones de dinámica:

$\sum F_x = M\cdot g\cdot \text{sen}(\gamma) - f_e = M\cdot a_c$

$\sum F_y = N - M\cdot g\cdot \cos(\gamma) = 0$ (no hay movimiento perpendicular al plano)

$\sum \tau_c = f_e\cdot R = I_{cm}\cdot \alpha$ (notar la convención de signos ad-hoc para la rotación)

Tenemos 4 incógnitas (a_{cm}, α, f_e y N) pero solo tres ecuaciones. Como se trata de rodadura perfecta podemos agregar $a_{cm} = R\cdot\alpha$. De esta forma:

$f_e = (I_{cm}\cdot\alpha)/R = (2/5\cdot M\cdot R^2/R)(a_{cm}/R) = 2/5\cdot M\cdot a_{cm}$

Sustituyendo este resultado en $\sum F_x$ obtenemos

$$\mathbf{a_{cm} = (5/7)\cdot g\cdot sen(\gamma)}$$

Hay varias cosas destacables de este resultado. En primer lugar, como obtenemos una aceleración constante, la velocidad final se puede obtener directamente con la formula $v^2 = v^2_0 + 2\cdot a\cdot d$, donde d es la distancia recorrida. Se deja propuesto calcular entonces la velocidad final. En segundo lugar, este resultado se parece mucho a la aceleración de una particula que desliza sin roce sobre un plano inclinado. En ese caso $a = g\cdot sen(\gamma)$. El valor con la esfera es ligeramente inferior ($5/7 \approx 0.71\ldots$), precisamente porque ahora estamos considerando el efecto del roce. Hemos agregado entonces un elemento de realismo a nuestra dinámica del primer semestre!

Propuesto: Verificar el resultado anterior empleando las ecs. 3-4a.
Propuesto: Calcular a_{cm} para distintas un disco y un aro de masa M y radio R.

4. Energía de la rodadura perfecta

Como mostramos en la unidad 4B, la ecuación de trabajo-energía puede aplicarse también a un cuerpo sólido, tal que:

$$\sum W(\mathbf{F}_{NC}) = \Delta(K + \sum U) \quad (5)$$

donde $\sum W(\mathbf{F}_{NC})$ es la suma del trabajo de las fuerzas externas no conservativas, K la energía cinética del cuerpo y $\sum U$ la suma de la energías potenciales asociadas a las fuerzas externas conservativas que actúan sobre el cuerpo. En particular, para un cuerpo que rota en torno a un eje fijo que pasa por el punto O demostramos que $K = ½\ I_O\cdot\omega^2$ y que la energía potencial gravitacional es $U = M\cdot g\cdot Y_{cm}$.

En el caso de la rodadura perfecta, la ecuación (5) aun es válida, con la precaución de que el eje de rotación pasa ahora por el punto de contacto P. Aplicando el teorema de Steiner, podemos escribir ahora:

$$K = ½\ I_P\cdot\omega^2 = ½\ (I_{cm} + M\cdot R^2)\cdot\omega^2 = ½\ I_{cm}\cdot\omega^2 + ½\ M\cdot v_{cm}^2 \quad (6)$$

Es decir, podemos considerar que la energía cinética del cuerpo esta compuesta por la energía cinética de rotación respecto al centro de cilindro ($½\ I_{cm}\cdot\omega^2$) más la energía cinética asociada al desplazamiento del centro de masa ($½\ M\cdot v_{cm}^2$).

Una fuerza no conservativa es el roce. En el caso de la rodadura perfecta, el roce es estático (punto P en reposo instantáneo), de manera que esta fuerza **no** realiza trabajo.

Ejemplo (muy importante parta la experiencia práctica)

Al igual que en el ejemplo anterior, considere una esfera sólida de masa *M* y radio *R* que rueda sin resbalar por un plano inclinado (ángulo γ con la horizontal). Determine la velocidad del centro de masa cuando la esfera ha bajado una altura *H*, pero esta vez empleando conservación de energía.

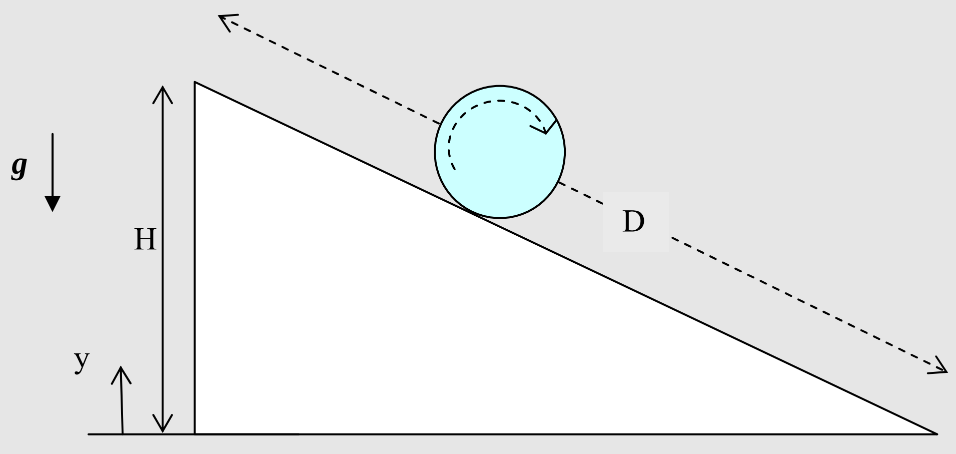
Consideremos ahora el eje y vertical, como se muestra en la figura, con su "cero" en la base del plano. Entonces:

$E_i = K_i + U_i = 0 + M{\cdot}g{\cdot}H$
$E_f = K_f + U_f = (\frac{1}{2} I_{cm}{\cdot}\omega^2 + \frac{1}{2} M{\cdot}v_{cm}^2) + 0 = \frac{1}{2} (I_{cm}/R^2 + M) {\cdot}v_{cm}^2$

En la ultima ecuación hemos empleado que en rodadura perfecta $v_{cm} = R{\cdot}\omega$ y sustituido el valor $I_{cm} = (2/5){\cdot}M{\cdot}R^2$. Las fuerzas externas no conservativas son ***N*** y $\boldsymbol{f}_e$, pero ninguna realiza trabajo pues la primera es ⊥ al desplazamiento y la segunda es estática. Entonces $E_i = E_f$, de donde:

$v_{cm}^2 = (10/7){\cdot}g{\cdot}H = 2{\cdot} (5/7){\cdot}g{\cdot}D{\cdot}\mathrm{sen}(\gamma) = 2{\cdot} \underline{(5/7){\cdot}g{\cdot}\mathrm{sen}(\gamma)}{\cdot}D$

Por analogía con la ecuación de movimiento con aceleración constante ($v^2 = v_0^2 + 2{\cdot}a{\cdot}d$) resulta que $a_{cm} = (5/7){\cdot}g{\cdot}\mathrm{sen}(\gamma)$, tal como habíamos obtenido en la solución empleando torque.



Referencias

La rodadura perfecta de un cuerpo rígido se presentan en:

- Sección 11.1 del libro *Física* de Serway, Tomo 1, tercera edición.
- Secciones 9.7 de libro Física para la Ciencia y Tecnología de Tipler.
- Secciónes VI.7 del libro *Introducción a la Mecánica* de N. Zamorano.

ANEXO A

Apuntes de Mecánica
Prof. Ricardo Muñoz

7.4. Momento Angular del Sistema

7.4.1. Momento Angular respecto del Origen

El momento angular de cada partícula respecto al origen O del sistema de referencia fue definido por

$$\vec{l}_{Oi} = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{7.29}$$

y derivamos en capítulos anteriores su ecuación de evolución

$$\frac{d\vec{l}_{Oi}}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{neto}} = \vec{\tau}_{Oi}^{\text{neto}} \tag{7.30}$$

que corresponde a la ecuación del momento angular.

Se define el momento angular del sistema de partículas con respecto al origen simplemente como la suma de los momentos angulares de todas las partículas que componen el sistema:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_{Oi} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \tag{7.31}$$

Nos interesa derivar la ecuación que nos diga cómo cambia $\vec{L}_O$ en el tiempo, lo cual obtenemos simplemente derivando 7.31 con respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{Oi}^{\text{neto}}. \tag{7.32}$$

Podemos simplificar esta expresión si distinguimos entre los torque ejercidos por las fuerzas internas y las fuerzas externas al sistema

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}. \tag{7.33}$$

Llamemos S a la doble sumatoria que contiene los torques de las fuerzas internas:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}. \tag{7.34}$$

Consideremos los términos presentes en S que involucran a las partículas P y Q:

$$S = \cdots + \vec{r}_P \times \vec{F}_{PQ} + \cdots + \vec{r}_Q \times \vec{F}_{QP} + \cdots \tag{7.35}$$

y recordemos que por la ley de acción y reacción, $\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{QP}$ de tal modo que 7.35 equivale a

$$S = \cdots + (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{PQ} + \cdots . \tag{7.36}$$

Por último consideramos que las fuerzas internas entre las partículas siempre tienen la dirección de la recta que las une, es decir, $(\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \parallel \vec{F}_{PQ}$, por lo que el producto cruz en 7.36 se anula, de lo cual $S = 0$, y la ecuación del momento angular respecto al origen para el sistema de partículas se reduce a

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{Oi}^{\text{neto;ext}} = \vec{\tau}_O^{\text{ext}}. \tag{7.37}$$

Podemos concluir que el momento angular del sistema respecto del origen es afectado sólo por el torque de las fuerzas externas al sistema, sin participación de las fuerzas internas.

7.4.2. Momento Angular respecto a otros puntos

La ecuación 7.37 muestra que el momento angular del sistema respecto al origen tiene una ecuación de evolución muy semejante a la ecuación del momento angular de una partícula individual. Análogamente a lo que hicimos en el caso de una partícula, podemos definir el torque del sistema respecto a un punto cualquiera Q (que en general puede moverse con velocidad $\vec{v}_Q$) en la forma

$$\vec{L}_Q = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{v}_i. \tag{7.38}$$

Se puede ver que

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_O - \vec{r}_Q \times M\vec{V}_{\text{CM}} \tag{7.39}$$

de tal manera que su ecuación de evolución es

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} - \vec{r}_Q \times M\vec{A}_{\text{CM}} - \vec{v}_Q \times M\vec{V}_{\text{CM}}. \tag{7.40}$$

Reemplazando 7.37 y 7.8 en la ecuacion anterior

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} - \vec{r}_Q \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \times M\vec{V}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \times M\vec{V}_{\text{CM}}. \tag{7.41}$$

Por lo tanto, el momento angular del sistema respecto a un punto arbitrario Q tiene la ecuación

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\mathcal{T}}_Q^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \times M\vec{V}_{\text{CM}}, \tag{7.42}$$

donde hemos llamado $\vec{\mathcal{T}}_Q^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$, que corresponde al torque de las fuerzas externas respecto al punto Q. En este caso la ecuación del momento angular no tiene la simpleza de 7.37, puesto que además del torque de las fuerzas externas respecto a Q ($\vec{\mathcal{T}}_Q^{\text{ext}}$) se debe incluir el último término de la mano derecha.

En dos casos la ecuación del momento angular 7.42 toma su forma más simple en que el último término de la mano derecha se anula. El primer caso es cuando el punto Q tomado como referencia no se mueve respecto al origen ($\vec{v}_Q = 0$). Este caso incluye por supuesto el caso en que el punto Q es justamente el origen, en cuyo caso 7.42 es exactamente igual a 7.37. Sin embargo, el mismo tipo de ecuación simple de momento angular se aplica si Q es cualquier otro punto fijo.

El segundo caso en que 7.42 se simplifica es menos trivial. Cuando el punto Q corresponde al centro de masa del sistema, el último término de 7.42 también se anula pues las dos velocidades involucradas en el producto cruz son idénticas. Por lo tanto, podemos escribir que la ecuación de evolución del momento angular del sistema respecto a su centro de masa es

$$\frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{\text{CM}i}^{\,\text{neto;ext}} = \vec{\mathcal{T}}_{\text{CM}}^{\text{ext}}. \tag{7.43}$$

Lo novedoso de esta ecuación es que se cumple independiente de cuán complicado sea el movimiento del centro de masa.