FIA2 – Sistemas Newtonianos
Semestre 2007-2

Unidad 5 – El principio de Conservación de Energía aplicado a Cuerpos Sólidos

René D. Garreaud
Departamento de Geofísica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

0. Notación en este Apunte

Los escalares (masa, energía, etc.) se escriben en *cursiva*, tanto en mayúsculas como minúsculas (m, K, etc.), o empleando una letra de alfabeto Griego (ω, δ, etc). Las cantidades escalares se escriben en **negrita** (**F**, **dv**, etc). La multiplicación entre escalares se denota con un pequeño punto (·), el producto cruz por una cruz (×) y el producto punto por un asterisco (*).

1. Conservación de la Energía para una Partícula

En el primer semestre Ud. conoció y aplicó el principio de Conservación de Energía para una partícula. En el contexto de la mecánica Newtoniana este principio se deriva directamente de la segunda ley de Newton ($\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{a}$), obteniéndose que el Teorema del trabajo-energía: el trabajo neto realizado por las fuerzas externas actuando sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la propia partícula:

$$W_{\mathrm{neto}} = k_{\mathrm{f}} - \mathrm{k}K_{\mathrm{i}} \qquad (1)$$

donde $k = ½\cdot m\cdot v^2$ es la energía cinética y el trabajo de una fuerza **F** en un pequeño intervalo **dx** se evalúa como $dW = \mathbf{F}*\mathbf{dx}$ (se emplea el producto punto). Los subíndices i y f se refieren a la una condición inicial y final, respectivamente. El trabajo neto corresponde a la suma de los trabajos individuales de cada fuerza.

La evaluación del trabajo neto requiere “integrar” (es decir, sumar con mucho detalle) los dW entre una posición inicial y otra final a lo largo de la trayectoria de la partícula. Sin embargo, existen fuerzas en que el trabajo neto NO depende del camino recorrido sino que exclusivamente de la posición inicial y final de la partícula. Estas fuerzas se denominan **conservativas** e incluyen al peso ($m\cdot\mathbf{g}$) y la fuerza elástica. En contraste, la fuerza de roce entre una partícula y una superficie (usualmente escrita como $-\mu_c\cdot\boldsymbol{N}$) no es conservativa.

Como para una fuerza conservativa, **Fc**, el trabajo efectuado es solo función de las coordenadas, se puede definir una función de energía potencial, *U*, tal que el trabajo realizado es igual a la disminución en la energía potencial:

$$W\mathrm{c} = \int \mathbf{F}*\mathbf{dx} = -\Delta u = u_{\mathrm{i}} - u_{\mathrm{f}} \tag{2}$$

Consideremos que sobre una partícula solo actúa una fuerza conservativa **Fc**. Entonces, combinando (1) y (2) obtenemos que $\Delta k = W\mathrm{c} = -\Delta u$, de donde:

$$\Delta(k + u) = 0 \tag{3}$$

que es una forma de escribir la ley de la conservación de la energía mecánica. Podemos además definir la energía mecánica total del sistema como $e \equiv k + u$.

Como *E* permanece constante a medida que la partícula se desplaza, cualquier cambio de la energía cinética ocurre a expensas de igual cambio (pero de signo opuesto) en la energía potencial. Si sobre el sistema actúa más de una fuerza conservativa y otras fuerzas no-conservativas (**Fnc**, como el roce), obtenemos una ecuación más general:

$$\sum W(\mathbf{Fnc}) = \Delta(k + \sum u) \tag{4}$$

La ecuación (4) puede ser aplicada en la resolución de numerosos problemas de dinámica, en especial cuando $\sum W(\mathbf{Fnc}) \sim 0$. En estos casos debe conocerse completamente el estado de la partícula (posición y velocidad) en un instante y se desconoce una de las variables de estado en un instante posterior.d

Como mencionábamos anteriormente, tanto el peso como la fuerza elástica son fuerzas conservativas, y sus potenciales son $u_{\mathrm{g}} \equiv m{\cdot}g{\cdot}y$ y $u_{\mathrm{e}} \equiv \frac{1}{2}{\cdot}k{\cdot}\delta^2$, respectivamente. Aquí *y* corresponde a la altura sobre un nivel de referencia (arbitrario pero fijo). Si la partícula esta sobre (bajo) ese nivel $y > 0$ ($y < 0$). δ representa la deformación (compresión o deformación) de un resorte adherido a la partícula. *g* es la magnitud de la aceleración de gravedad (+9.8 m/s^2) y *k* la constante elástica del resorte.

Ejemplo 1. Un objeto se suelta desde una altura H sobre el suelo. A que velocidad impacta contra el suelo?

Sol.: Despreciando el roce con el aire, podemos aplicar la conservación de energía mecánica entre el instante inicial (objeto se suelta) y final (objeto impacta el suelo):

$½\cdot m\cdot 0^2 + m\cdot g\cdot H = ½\cdot m\cdot \mathrm{v}_f^2 + \mathrm{m}\cdot\mathrm{g}\cdot 0$, de donde obtenemos directamente $v_f = (2\cdot g\cdot H)^{1/2}$

2. Conservación de la Energía para un Cuerpo Rígido

Veamos ahora como se aplica el principio de conservación de energía a un cuerpo rígido. Recordemos aquí que el cuerpo rígido puede trasladarse y rotar pero no sufre deformaciones de su forma (por eso es rígido). En consecuencia, la posición relativa entre las partículas que lo forman no cambia en el tiempo.

Cada partícula esta sometida a fuerzas externas (por ejemplo, el peso) y fuerzas internas (por ejemplo, las fuerzas que ejercen las partículas vecinas). Se puede demostrar que las fuerzas internas no realizan trabajo (recordar que las posiciones relativas no cambian), por lo que cada partícula conserva su energía mecánica de acuerdo a la ecuación (4).

Consideremos el caso simple en que la única fuerza externa es el peso. Entonces, para la partícula n-esima (n de un total de N) podemos escribir: $\Delta(K_n + \mathrm{m_n}\cdot\mathrm{g}\cdot\mathrm{y_n}) = 0$. En este caso el subíndice es el identificador de la partícula. Podemos sumar la expresión anterior para las N partículas y obtenemos:

$$\Delta(\sum K_n + \sum U_{ng}) = 0 \qquad (5)$$

Ya vimos en la Unidad 3 de este curso que descomponer un cuerpo sólido en muchas partículas (por ejemplo, moléculas) para luego hacer las sumas indicadas en la ecuación (5) NO es una muy buena idea, pues requiere sumar unos 10^{23} términos, por lo menos!

Energía Cinética de Rotación

Si el cuerpo esta rotando con respecto a un eje fijo, todas la partículas tienen igual velocidad angular, ω, y la velocidad (lineal) de la partícula n-esima es $\rho_n\omega$, donde ρ_n es el radio de la orbita que describe la partícula entorno al eje de rotación. Entonces, la energía cinética del sistema resulta ser:

$$K \equiv \sum K_n = \sum (½\cdot m_n\cdot v_n^2) = ½ \sum (m_n\cdot\rho_n^2)\, \omega^2 = ½\, I\cdot\omega^2 \qquad (6)$$

La cantidad I se denomina Momento de Inercia, y es una propiedad del cuerpo que juega un papel de gran importancia en la dinámica de las rotaciones. Consideremos su definición $I \equiv \sum (m_n \cdot \rho_n^2)$. Es claro que I crece con la masa total del cuerpo, pero depende críticamente de su forma y el eje de rotación. A igual masa, dos cuerpos pueden tener muy diferentes momentos de inercia en virtud de cuan cercana o lejana este la masa del eje de rotación. Vamos a regresar al cálculo de I un poco mas adelante.

Energía Potencial Gravitacional

El otro término en la ecuación (5) es la suma de la energía potencial gravitacional sobre el conjunto de las partículas. También se demostró en la Unidad 3 que:

$$Ug \equiv \sum Ug_n = \sum (m_n \cdot g^* y_n) = M^* g^* Y_{cm} \tag{7}$$

Donde M es la masa total del cuerpo e Y_{cm} representa la coordenada y del centro de masa respecto a un nivel de referencia.

Al igual que en el caso de una partícula, la ecuación de conservación (5), con la ayuda de las formulas (6) y (7), permiten resolver una serie de problemas de rotaciones en cuerpos rígidos, cuando solo interesan dos condiciones en la evolución del sistema (la inicial y final), pero no la evolución misma. Por ejemplo, como veremos en este experimento, con estas herramientas podremos conocer la velocidad angular de una regla que rota desde el reposo, pero no podremos determinar cuanto dura esta rotación.

Los problemas de rotación también pueden resolverse integrando la ecuación que vincula el torque con la aceleración angular del cuerpo (eso será el tema de la Unidad 6 en este curso), pero la solución mediante el uso de la conservación de energía es usualmente más simple. El “precio” que se paga con esta metodología es que debemos calcular el momento de inercia y la posición del centro de masa del sistema….un precio módico como veremos a continuación.

3. El centro de masa de un cuerpo rígido

Previamente definimos la posición del centro de masa de un sistema de partículas como:

$$\mathbf{R} = (1/M)\sum m_i \boldsymbol{r}_i \tag{8}$$

Esta definición puede ser extendida a un cuerpo rígido. Todos los vectores posición están referidos a un origen O de un sistema de referencia, por lo cual **R** cambia de si el cuerpo se mueve o rota. Sin embargo, el centro de masa, como un punto singular del cuerpo en cuestión, no cambia para un sólido rígido.

También es conveniente recordar que al considerar un sistema compuesto por varios cuerpos, podemos calcular primero la posición del CM de cada cuerpo, y luego sumarlos para encontrar el CM del sistema. En otras palabras, cada cuerpo es tratado como una partícula con la masa concentrada en su propio CM y luego empleamos la ecuación (8).

Consideremos por ejemplo un sistema formado por una barra de largo *L* y masa *M* distribuida en forma uniforme, unida a una esfera pequeña de masa 2*M* en uno de sus extremos. En un cierto instante la barra esta dispuesta en forma horizontal, pero luego rotara en torno a uno de sus extremos hasta quedar en posición vertical. Pongamos nuestro sistema de referencia en el punto de rotación (aun cuando este permanece fijo).

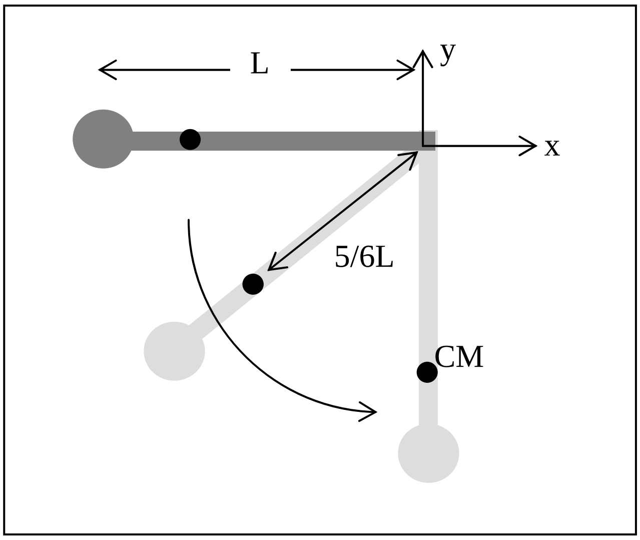


Figura 1: Centro de masa de una barra + esfera

Cuando la barra esta horizontal, la posición del CM es:

$\mathbf{Ri} = (2M\cdot\mathbf{R}\text{esfera} + M\cdot\mathbf{R}\text{barra})/(3\cdot M) = -[(2M\cdot L + M\cdot L/2)/(3\cdot M)]\mathbf{i} = -5/6\cdot L\ \mathbf{i}$

Notar que hemos empleado el hecho del que el centro de masa de una barra homogénea esta en su centro (Unidad 3). El signo – y el vector unitario **i** en la posición del CM aparecen por la posición específica del sistema en este instante. Mas importante, sabemos que el CM se ubica a 5/6 del largo desde el extremo sin la esfera (o a 1/6 de su largo desde la esfera).

Cual es la posición del CM cuando el sistema esta vertical? No necesitamos calcular la posición del CM nuevamente. Por simple inspección podemos escribir: $\mathbf{Rf} = -5/6\cdot L\ \mathbf{j}$

4. El momento de Inercia

Ya definimos $I \equiv \sum (m_i \cdot r_i^2)$. En general resulta que $I = \gamma \cdot M \cdot L^2$, donde M es la masa total del cuerpo, L es una dimensión característica (radio de un disco, largo de una barra) y γ un valor numérico que depende de cada caso. Recuerde además que el valor de I es dependiente del eje en torno al cual ocurre la rotación del cuerpo. Para un cuerpo cuya forma sea relativamente simple, el valor de I se obtiene empleando calculo integral. Para cuerpos aun más simples, I puede obtenerse aplicando la sumatoria anterior.

Por ejemplo, el momento de inercia de un anillo de material uniforme, masa M y radio R en torno a un eje que pasa por su centro es: $I = \sum (m_i \cdot r_i^2) = \sum (m_i \cdot R^2) = M \cdot R^2$

Que pasa si la misma masa M se distribuye ahora en un disco de radio R? Muchas partículas que antes estaban en la periferia se mueven ahora hacia el centro del disco, haciendo disminuir el momento de inercia. De hecho, en este caso $I = ½\, M \cdot R^2$.

Propuesto: Cual es el valor de I si se trata de un cascarón cilíndrico o un cilindro sólido de radio R y masa M, que rota en torno a su eje de simetría?

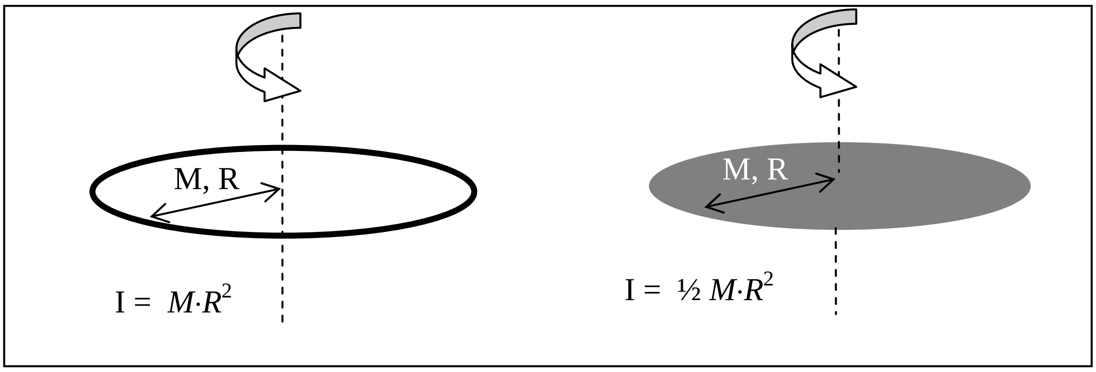


Figura 2: Momento de Inercia de un aro y un disco

Consideremos ahora el momento de inercia de una barra delgada de masa M y largo L que puede rotar en torno a uno de sus extremos. En este caso, el método de la sumatoria $I = \sum (m_i \cdot r_i^2)$ también funciona. Para eso la barra se divide en n trozos, cada uno de largo $d = L/n$ y masa $dm = M/n$. Al final de la sumatoria, se debe tomar el limite de $N \to \infty$ (con lo cual d y $dm \to 0$). En el libro *Introducción a la Mecánica* (Nelson Zamorano) se hacen estas sumatorias en forma explicita (pags. 298-299), de donde $I_0 = 1/3 M \cdot L^2$

El valor anterior es el momento de inercia de una barra respecto a su extremo. Que pasa si queremos calcular I de una barra respecto a su punto central? Aquí podemos explotar el hecho de que I es una propiedad aditiva, así que este nuevo momento de inercia se calcula como la suma de dos momentos de inercia: uno de la barra al lado derecho del centro y la otra al izquierdo (en este caso ambas son identicas)

$I_c = I_{izq} + I_{der} = 2*I_0 = 2*[1/3\cdot(M/2)\cdot(L/2)^2] = 1/12\cdot M\cdot L^2$

Propuesto: Calcule el I de una barra en torno a un punto ubicado a ¼ de uno de sus extremos.

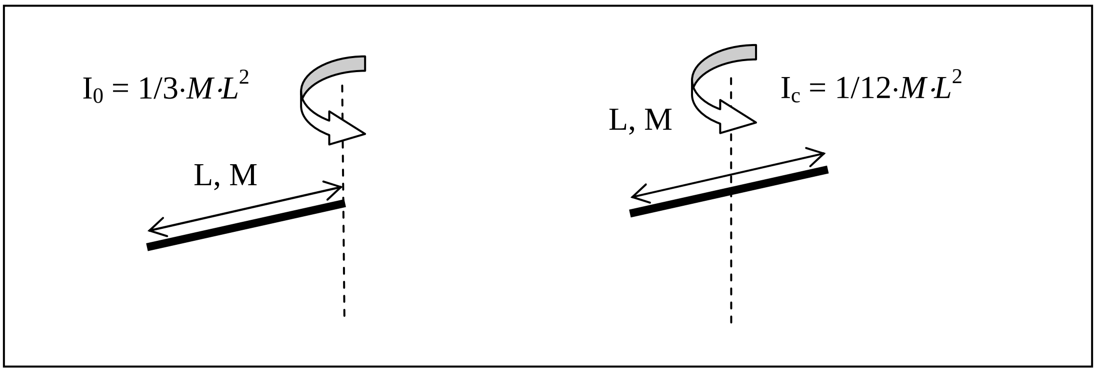


Figura 3: Momento de Inercia de una barra delgada

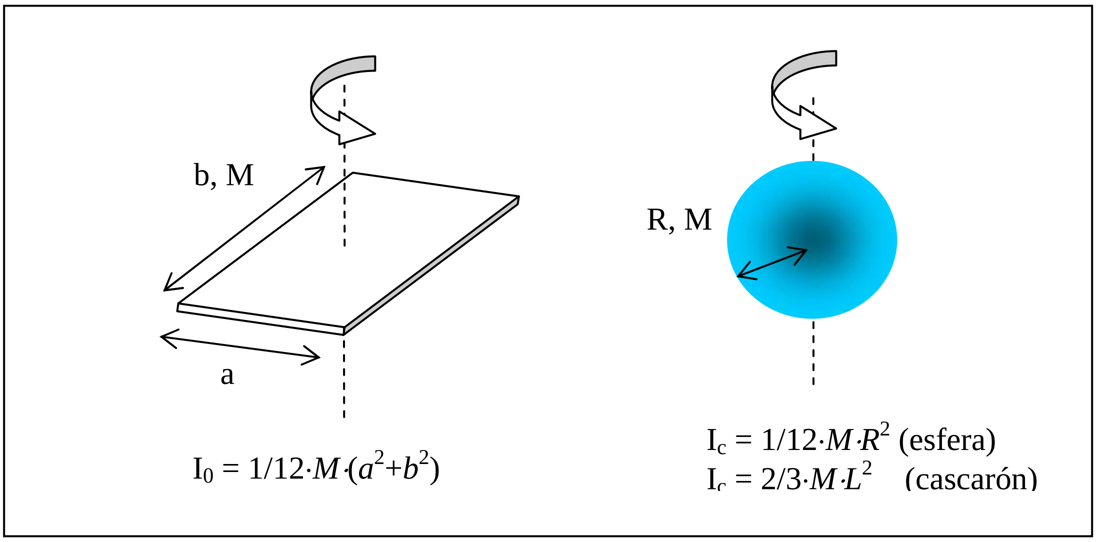


Figura 4: Momento de Inercia de una lamina, una esfera llena y un cascarón esférico

5. Teorema de Steiner

Existen muchos casos en que conocemos el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje que pasa por su centro de masa (I_{CM}), pero el cuerpo gira en torno a otro eje, paralelo al anterior pero desplazado una distancia R. Para calcular el momento de inercia respecto a este nuevo eje (I_0) podemos emplear el teorema de Steiner o de los ejes paralelos. En su demostración empleamos la geometría y notación de la figura adjunta:

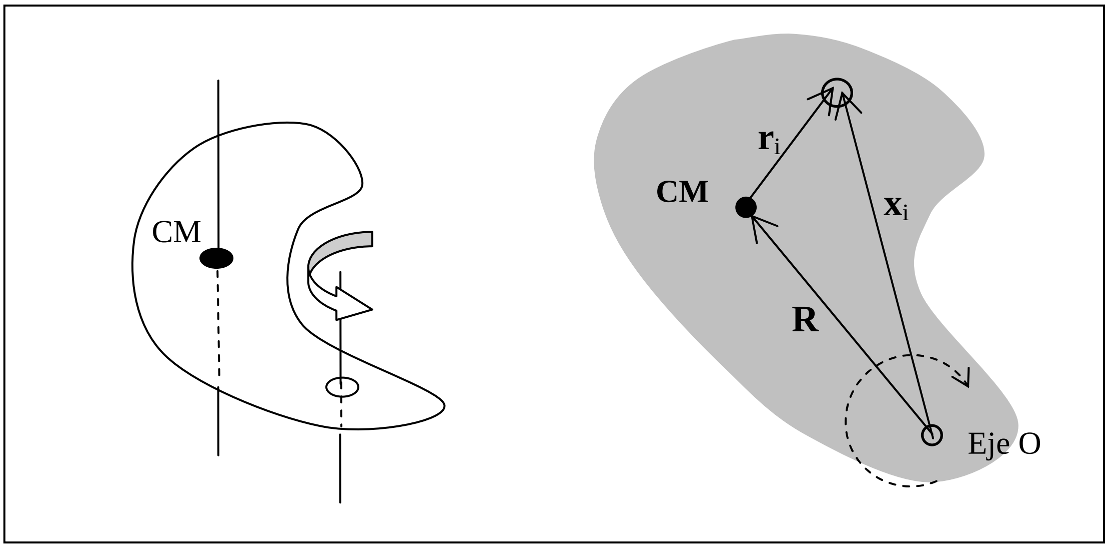


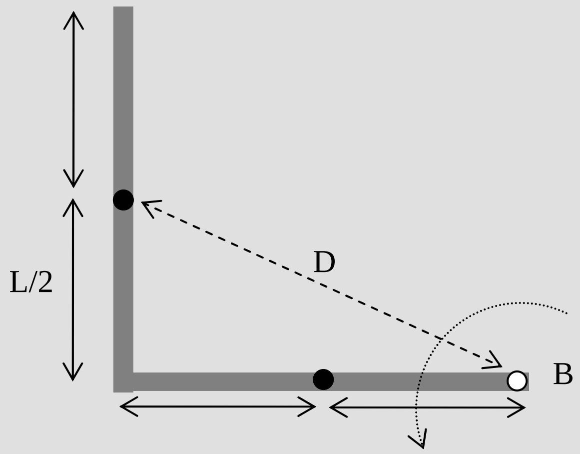
Figura 5: En la izquierda se muestra una vista 3-D del cuerpo y los ejes que pasan por el centro de masa y el nuevo eje de rotación. En la derecha se muestra el cuerpo en planta.

$I_0 = \sum (m_i \cdot x_i^2)$	(por definición)
$\mathbf{x}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i$	(simple suma de vectores)
$(\mathbf{x}_i)^2 = (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i)^2 = \mathbf{R}^2 + 2 \cdot \mathbf{R} * \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i^2$	(álgebra vectorial)
$I_0 = \sum m_i \cdot [\mathbf{R}^2 + 2\,\mathbf{R} * \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i^2]$	(entonces...)
$\sum m_i \cdot \mathbf{r}_i = 0$	(por definición de CM)
$I_0 = \sum m_i \cdot [\mathbf{R}^2 + \mathbf{r}_i^2]$	(finalmente....)

$$I_0 = M \cdot \mathbf{R}^2 + I_{CM} \qquad (9)$$

Ejemplo: Consideremos una barra delgada en forma de L, con dos partes iguales cada una de masa *M* y largo *L*. Calcular el momento de inercia respecto su extremo B. Recuerde que el momento de inercia de una barra de largo *l* y masa *m* con respecto a su CM es $1/12ml^2$

Sol.: Aunque se trata de un cuerpo sólido, haremos el calculo descomponiendo la L en sus dos partes (vertical y horizontal): $I_0 = I_H + I_V$. En cada caso aplicamos Steiner:

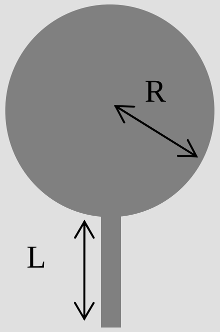


$$I_H = I_{CM} + M\cdot (L/2)^2 = 1/12\cdot M\cdot L^2 + 1/4\cdot M\cdot L^2 = 1/3\cdot M\cdot L^2 \text{ (esto ya lo sabíamos)}$$

$$I_v = I_{CM} + M\cdot D^2 = 1/12\cdot M\cdot L^2 + 5/4\cdot M\cdot L^2 = 4/3\cdot M\cdot L^2$$

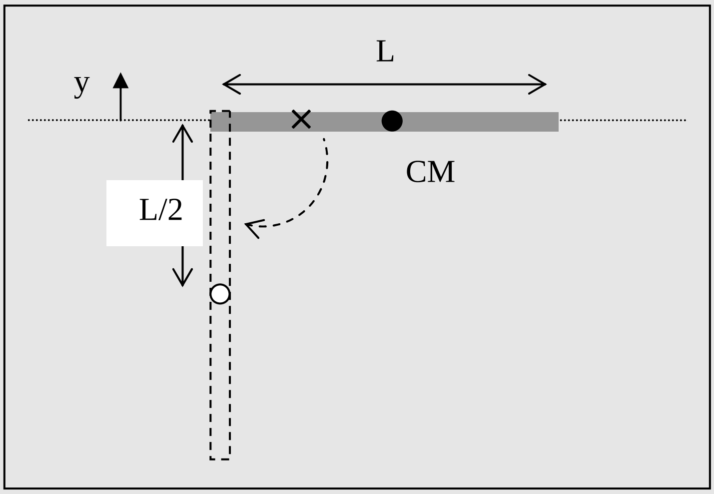
$$\text{Entonces : } I_0 = 5/3\cdot M\cdot L^2$$

Propuesto: Como cambia I si se agrega una masa puntual 5M en el extremo opuesto a B? Como cambia I si se agrega una masa puntual 5M en B?



Propuesto: Considere un disco de radio R y masa M. El disco tiene adherida una barra delgada de largo L y masa m. Calcule el momento de inercia respecto al centro del disco y el extremo de la barra.

Ejemplo: Una barra uniforme de largo L y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La barra se suelta de la posición horizontal. ¿Cual es la velocidad angular de la barra cuando esta pasa por la vertical? ¿Cuál es la velocidad del CM en ese instante?



Podemos resolver este problema fácilmente considerando la energía mecánica del sistema $E = K + U_g$. Para U_g tomemos como referencia el nivel donde la barra esta horizontal. Como la rotación ocurre en torno a un extremo, $I_0 = 1/3 \cdot M \cdot L^2$. Suponiendo que la barra es de material uniforme, su CM esta en su centro geométrico.

$E_i = K_i + U_{gi} = 0 + 0$ (barra en reposo, $Y_{CM} = 0$)
$E_f = ½ \cdot I_0 \cdot \omega_f^2 + M \cdot g \cdot Y_f = ½ \cdot (1/3 \cdot M \cdot L^2) \cdot \omega_f^2 + M \cdot g \cdot (-½ \cdot L)$
$\omega_f = (3 \cdot g/L)^{1/2}$ y $v_{CM\text{-}f} = ½ \cdot L \cdot \omega_f = ½ \cdot (3 \cdot g \cdot L)^{1/2}$

Si L = 1 m, $\omega_f = 5.4$ rad/seg ($\omega_{minutero} = 2\pi/60 = 0.1$ rad/seg) y $v_{CM\text{-}f} = 2.7$ m/s.
Si la barra gira en torno a X…aumenta o disminuye ω_f? Calcule…

Comentarios finales y preparación para la experiencia práctica

Consideremos un cuerpo rígido sobre el cual solo actúa el peso y que puede rotar en torno a un eje. Si el cuerpo se suelta desde el reposo, podemos evaluar la velocidad angular en cualquier otro instante (por ejemplo, cuando pasa por su CM pasa por su punto más bajo) empleando la conservación de la energía mecánica (ecs. 5, 6 y 7):

$$\omega_f = (2 \cdot M \cdot g \cdot \Delta Y_f / I)^{1/2}$$

donde ΔY_f es el cambio en la posición del centro de masa. Como I es proporcional a M, el resultado anterior es independiente de la masa del cuerpo. De esta forma, la velocidad angular final crece con el desplazamiento del centro de masa (se esta transformando energía potencial gravitacional en energía cinética) pero disminuye con I. Si realizamos el mismo experimento pero cambiamos su geometría, no es simple determinar si aumenta o disminuye ω_f, pues se altera tanto I como ΔY_f. Por ejemplo, si hacemos que la masa quede más cercana al eje de rotación, disminuye I y ΔY_f.

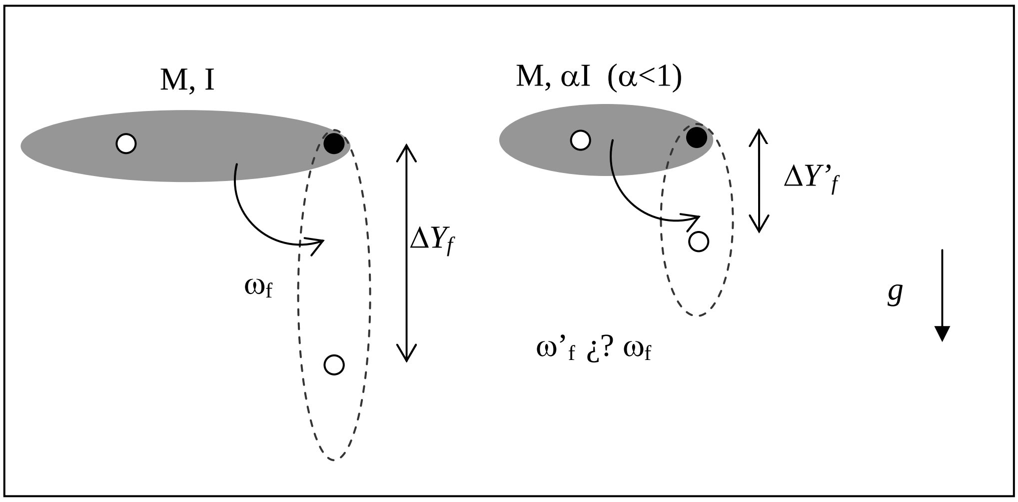


Figura 5. Dos cuerpos de igual masa pero distinta forma …cual "cae" mas rápido?

<u>Piense en este problema…es precisamente lo que estudiaremos en la sesión práctica.</u>

Referencias

La energía cinética de rotación, el momento de inercia y la conservación de energía mecánica en un cuerpo rígido se presentan en:

- Secciones 10.4 a 10.8 del libro *Física* de Serway, Tomo 1, tercera edición.
- Secciones 8.5 y 9.5 de libro Física para la Ciencia y Tecnología de Tipler.
- Seccións VI.6.2. y VI.8 del libro *Introducción a la Mecánica* de N. Zamorano.