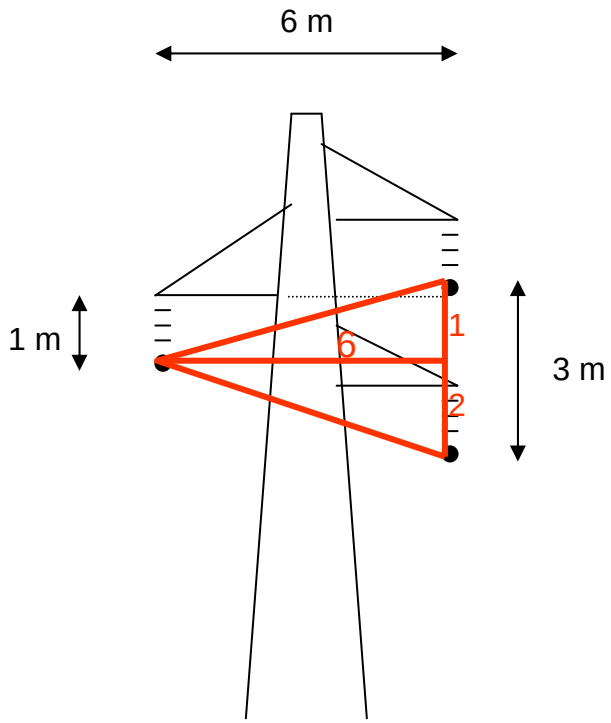
Problema 1

Lo primero que debemos hacer es determinar la *distancia equivalente*.



$$d_1 = \sqrt{6^2 + 1^2} = 6,0828[m]$$
$$d_2 = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6,3246[m]$$
$$d_3 = 3[m]$$
$$D_{eq} = \sqrt[3]{6,0828 \cdot 6,3246 \cdot 3} = 4,8688[m]$$

a) - Capacitancia:

$$954[MCM] = 954 \cdot 0,5067\left[mm^2\right] = 483,3918\left[mm^2\right]$$
$$r = \sqrt{\frac{483,3918}{\pi}} = 12,4044[mm]$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\left(\frac{Deq}{r}\right)} = 9,3147\times10^{-12}\left[F/m\right] = 9,3147\times10^{-9}\left[F/km\right]$$
$$1/X_c = 2\pi 50C = 2,9263\times10^{-9}\left[S/m\right] = 2,9263\left[\mu S/km\right]$$

- Inductancia:

$$r_{eq}^{l} = r\cdot e^{-\frac{1}{4}} = 9,6606\left[mm\right]$$

$$L = 2\times10^{-7} ln\left(\frac{Deq}{r_{eq}^{l}}\right) = 1,2445\times10^{-6}\left[H/m\right] = 1,2445\times10^{-3}\left[H/km\right]$$
$$X_L = 2\pi 50\times L = 0,3910\left[\Omega/km\right]$$

- Resistividad

$$R = \frac{\rho}{S} = 0,0679\left[\frac{Ohm}{km}\right]$$

b) Primero calculamos Z e Y/2:

$$Z = \left(R + j\omega L\right)\cdot l = \left(0,0679 + j100\pi L\right)\cdot 80 = 5,432 + j31,2777\left[\Omega\right]$$
$$\frac{Y}{2} = \left(\frac{j\omega C}{2}\right)\cdot l = \left(\frac{j100\pi C}{2}\right)\cdot 80 = j1,1705\times10^{-4}\left[S\right]$$

Luego se calculan los parámetros ABCD según la aproximación de línea corta

$$A = D = 0,9963 + j0,0006 = 0,9963\angle 0,0345°\ \left(adimennsional\right)$$
$$B = Z = 5,432 + j31,2777\left[\Omega\right]$$
$$C = \left(-0,7442 + j2336,7147\right)\times10^{-7}\left[S\right]$$

Muchas veces será necesario pasar estos parámetros a valores en por unidad. Notar que A y D son adimensionales, por lo tanto *no se hace algo para expresarlos en por unidad.* No es el caso de B y C, los cuales deben ser expresados según la base que corresponda.

$$Z_b = \frac{V^2}{S_b} = \frac{\left(220\times10^3\right)^2}{100\times10^6} = 484\left[\Omega\right],\quad Y_b = \frac{1}{Z_b} = 0,0021\left[S\right]$$

Luego,

$$B_{p.u.} = 0,0112 + j0,0646$$
$$C_{p.u.} = -3,6019 \cdot 10^{-5} + j0,1131$$

c) Primero se debe calcular la impedancia característica de la línea y la constante de propagación.

$$Z_c = 366,8869 - j31,622[\Omega]$$
$$\gamma = (9,2535 + j107,3621) \times 10^{-5} \left[\frac{1}{km}\right]$$

Con esto podemos calcular Z´ e Y´/2:

$$Z' = 5,4187 + 31,2407[\Omega]$$
$$\frac{Y'}{2} = 1,2374 \times 10^{-8} + j1,17123 \times 10^{-4}[S]$$

Luego, usamos las expresiones para los parámetros ABCD de línea larga:

$$A = (0,9963 + j0,0006) = 0,9963 \measuredangle 0,0345°$$
$$B = Z' = 5,4187 + 31,2407[\Omega]$$
$$C = (-0,4968 + 2338,1837) \times 10^{-7}[S]$$

Propuesto: Realizarlo de la otra forma y calcular estos valores en por unidad.

d) Para calcular esto, usamos la matriz ABCD:

$$V_T = A \cdot V_R + B \cdot I_R$$

como la línea está en vacío, la corriente en el extremo receptor es cero. Luego:

$$V_R = \frac{V_T}{A}, |V_R| = \frac{|V_T|}{|A|} = \frac{1}{0,9963} = 1,0037\, p.u.$$

Problema 2

a) $Deq = \sqrt[3]{12000 \cdot 12000 \cdot 24000} = 15119,0526[mm]$.

$$700[MCM] = 700 \cdot 0,5067\left[mm^2\right] = 354,69\left[mm^2\right]$$

$$r = \sqrt{\frac{354,69}{\pi}} = 10,6255\left[mm\right]$$

- Capacitancia:

$$r_{eq}^{c} = 1,09\sqrt[4]{r \cdot d^3} = 1,09\sqrt[4]{10,6255 \cdot 300^3} = 141,8583\left[mm\right]$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\left(\frac{Deq}{r_{eq}^{c}}\right)} = 1,1916 \times 10^{-11}\left[F/m\right] = 1,1916 \times 10^{-8}\left[F/km\right]$$

$$1/X_c = 2\pi 50C = 3,7435 \times 10^{-6}\left[S/km\right] = 3,7435\left[\mu S/km\right]$$

- Inductancia:

$$r_{eq}^{l} = 1,09\sqrt[4]{r \cdot e^{-\frac{1}{4}} d^3} = 1,09\sqrt[4]{10,6255 \cdot e^{-\frac{1}{4}} 300^3} = 133,2635\left[mm\right]$$

$$L = 2 \times 10^{-7} ln\left(\frac{Deq}{r_{eq}^{l}}\right) = 9,4628 \times 10^{-7}\left[H/m\right] = 9,4628 \times 10^{-4}\left[H/km\right]$$

$$X_L = 2\pi 50 \times L = 0,2973\left[\Omega/km\right]$$

- Resistividad

Para un conductor: $R = \frac{\rho}{S} = 0,0795\left[\Omega/km\right]$

Dado que son 4 conductores por fase, se calcula el paralelo de la resistividad por kilómetro, Luego $R = 0,0199\left[\Omega/km\right]$

b) Propuesto!!

c) Modelo de L.T. de parámetros distribuidos

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{0,0199 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 9,4628 \times 10^{-4}}{j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 1,1916 \times 10^{-8}}} = 281,96 - j9,4266[\Omega]$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = (3,5289 + j105,5523) \times 10^{-5} \left[\frac{1}{km}\right]$$

Para l=245 km

$$Z' = Z_c sinh(\gamma l) = 4,7675 + j72,0296[\Omega]$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c} tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right) = (1,7334 + j4611,5114)^{-7} \left[\frac{1}{\Omega}\right]$$

Parámetros ABCD en p.u.: Sólo B y C deben ser divididos por las impedancias y admitancias bases (A y D son adimensionales) en caso de querer ser expresadas en p.u.

En Base 100 MVA: $Z_b = \frac{(500kV)^2}{100MVA} = 2500[\Omega], Y_b = \frac{1}{Z_b} = 0,0004\left[\frac{1}{\Omega}\right]$

$$A = D = 0,9668 + j0,0022$$

$$B = Z' = 4,7675 + j72,0296[\Omega]$$

$$C = (-6,787 + j9069,8519) \times 10^{-7}[S]$$

Pasando a p.u. los parámetros B y C

$$B = 0,0019 + j0,0288$$

$$C = -0,0017 + j2,2675$$

En resumen:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9668 + j0,0022 & 0,0019 + j0,0288 \\ -0,0017 + j2,2675 & 0,9668 + j0,0022 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,9668\angle.1304 & 0,0289\angle 86.2255 \\ 2,2675\angle 90.043 & 0,9668\angle.1304 \end{bmatrix}$$

d) Para resolver este problema solamente se trabaja con los parámetros A y B:

$$\dot{V}_T = \dot{A}\dot{V}_R + \dot{B}\dot{I}_R$$

Sean:

$$\dot{V}_T = V_T \angle 0°$$
$$\dot{V}_R = V_R \angle \delta$$

Se tiene que:

$$V_T = AV_R \angle(\alpha + \delta) + (B \angle \beta)\dot{I}_R \quad / \dot{V}_R^{\,*}$$
$$V_T V_R \angle -\delta = AV_R^{\,2} \angle \alpha + (B \angle \beta)\left(\dot{V}_R \dot{I}_R^{\,*}\right)^*$$
$$V_T V_R \angle -\delta = AV_R^{\,2} \angle \alpha + BS \angle (\beta - \varphi)$$

De la última ecuación salen dos ecuaciones (parte real y parte imaginaria)

$$V_T V_R \cos(\delta) = AV_R^{\,2} \cos(\alpha) + BS \cdot \cos(\beta - \varphi)$$
$$-V_T V_R \, sen(\delta) = AV_R^{\,2} \, sen(\alpha) + BS \cdot sen(\beta - \varphi)$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumando:

$$V_T^{\,2} V_R^{\,2} = A^2 V_R^{\,4} + 2AV_R^{\,2} BS\left\{\cos(\alpha)\cos(\beta - \varphi) + sen(\alpha)\, sen(\beta - \varphi)\right\} + B^2 S^2$$
$$V_T^{\,2} V_R^{\,2} = A^2 V_R^{\,4} + 2AV_R^{\,2} BS\cos(\alpha + \varphi - \beta) + B^2 S^2$$

La última ecuación es para encontrar la magnitud del voltaje en el extremo receptor. Se obtienen 4 soluciones, de las cuales dos son 1,0647 y 0,1509

Si tomamos 1,0647 como el voltaje en el extremo receptor, el ángulo que cumple simultáneamente las ecuaciones de las partes imaginarias y reales es 6,9746.

Si tomamos 0,1509, las corrientes resultantes en el extremo receptor serán demasiado altas. Luego, la solución es 1,0647.

e) Una forma de abordar este problema es haciendo uso de las propiedades de las matrices de parámetros ABCD. Sea M_1 la matriz de parámetros ABCD de la línea de transmisión, y M_2 la matriz de la reactancia shunt. Cuando se conectan elementos en cascada, la relación entre los extremos transmisor y receptor está dada por M_1M_2.

En general, para un elemento shunt, la matriz de parámetros ABCD está dada por:

A = 1, B = 0, C = Y, D = 1

Para un elemento serie, la matriz de parámetros ABCD está dada por:

A = 1, B = Z, C = 0, D = 1

Si el voltaje en el extremo receptor no ha cambiado, i.e. V_T=1,1 p.u, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 1{,}1\angle\delta \\ I_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9668 + j0{,}0022 & 0{,}0019 + j0{,}0288 \\ -0{,}0017 + j2{,}2675 & 0{,}9668 + j0{,}0022 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jY & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}1\angle\delta \\ I_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9668 + j0{,}0022 + (0{,}0019 + j0{,}0288)\cdot jY & (0{,}0019 + j0{,}0288) \\ -0{,}0017 + j2{,}2675 + (0{,}9668 + j0{,}0022)\cdot jY & 0{,}9668 + j0{,}0022 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}1\angle\delta \\ I_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9668 + j0{,}0022 + (0{,}0019 + j0{,}0288)\cdot jY \\ -0{,}0017 + j2{,}2675 + (0{,}9668 + j0{,}0022)\cdot jY \end{bmatrix}$$

De los primeros elementos del vector se obtienen dos ecuaciones:

$$1{,}1\cdot cos(\delta) = 0{,}9668 - 0{,}0288\cdot Y$$
$$1{,}1\cdot sen(\delta) = 0{,}0022 + 0{,}0019\cdot Y$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y luego sumando:

$$1{,}21 = 0{,}9347 - 0{,}0557\cdot Y + 0{,}0008\cdot Y^2$$

Las soluciones de esta ecuación son: $Y = 74{,}2591 \;\; e \;\; Y = -4{,}6341$

Si se trata de encontrar delta en la primera ecuación para el primer valor de Y, se debe notar que se cae fuera del dominio de la función acos. Además, como lo que se busca es una reactancia, el valor de la admitancia debe ser negativa ($\dot{Y} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = jY$). Si se reemplaza Y en la segunda ecuación, se concluye que δ=-0,3128º.

Luego:

$$\left|X_L\right| = \left|1/Y\right| = 0,2158\left[p.u.\right] = 539,5\left[Ohm\right]$$

En términos de potencia reactiva, el reactor de 500kV a 1 p.u.:

$$S = V \cdot I^* = V \cdot \left(\frac{V}{Z}\right)^* = \left|V\right|^2 \frac{1}{Z}^*$$

$$\left|S\right| = \left|Y\right| = 463,41\left[MVar\right]$$

f) Esto no se alcanzó a ver en clase auxiliar. Si alguien se interesa en esto, puede pasar por mi oficina o consultar algún libro de SEP, como el de Stevenson o el de Hadat