



Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile



EL 57A SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA

Clase 4: Introducción a Sistemas de Potencia

**Luis Vargas
AREA DE ENERGIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA**



Contenido (II)

2. Conceptos matemáticos básicos para el estudio de sistemas trifásicos

2.1 Introducción

2.2 Sistemas de corriente alterna: términos y modelos

2.3 Sistemas equilibrados

2.4 Equivalentes monofásicos

2.5 Potencia en sistemas alternos

2.6 Magnitudes y cálculo en por unidad



Introducción (I)

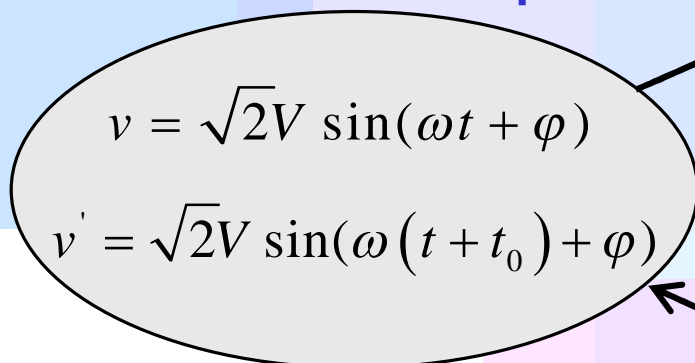
Herramientas básicas de análisis adquiridas en otros cursos

Cálculo con números complejos, representación fasorial, cálculo matricial, funciones de transferencia.

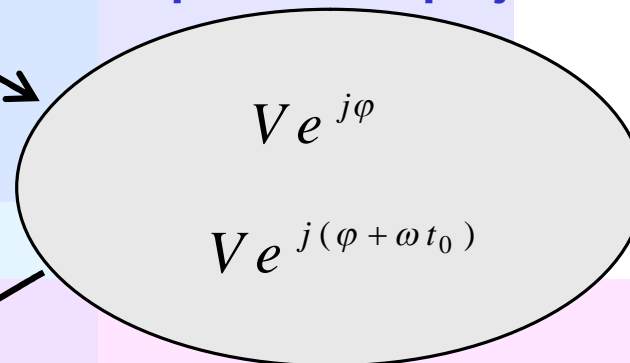
Representación sinusoidal y fasorial de corrientes y voltajes

F tiene la propiedad de ser lineal y biyectiva.

Dominio del tiempo



Espacio Complejo



$F \{ \}$

$F^{-1} \{ \}$

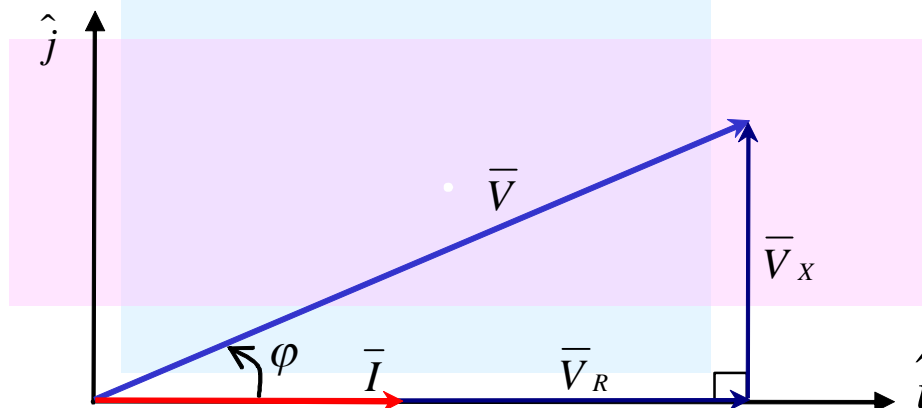
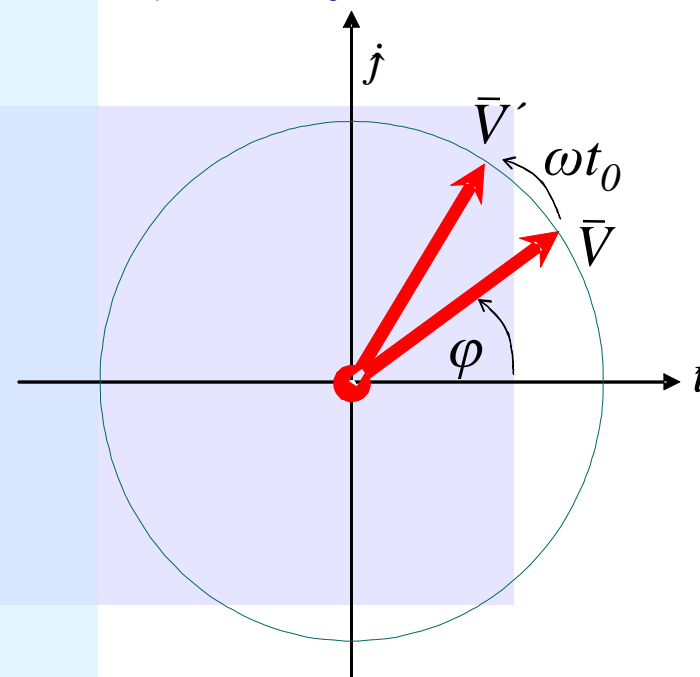
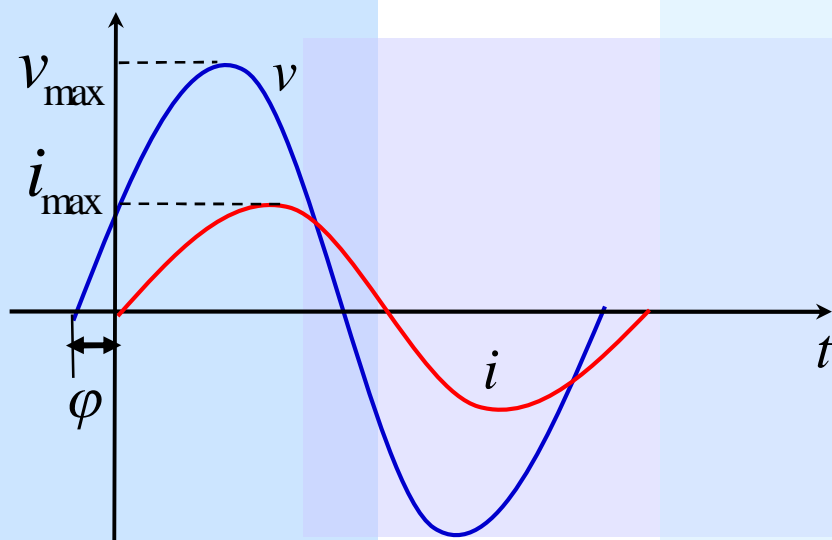
$$F \left\{ \sqrt{2}V \sin(\omega t + \varphi) \right\} = V e^{j\varphi}$$

$$F^{-1} \left\{ V e^{j\varphi} \right\} = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \varphi)$$



Introducción (I)

Representación sinusoidal y fasorial de corrientes y voltajes





Introducción (II)

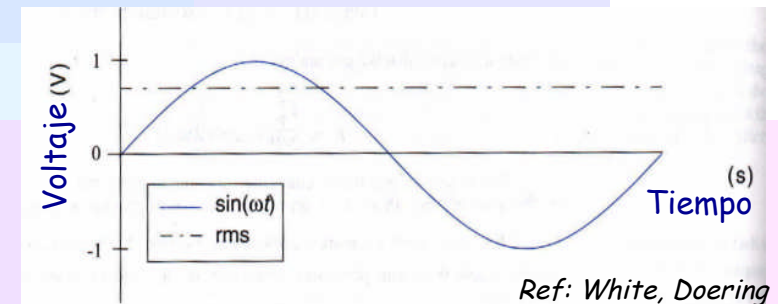
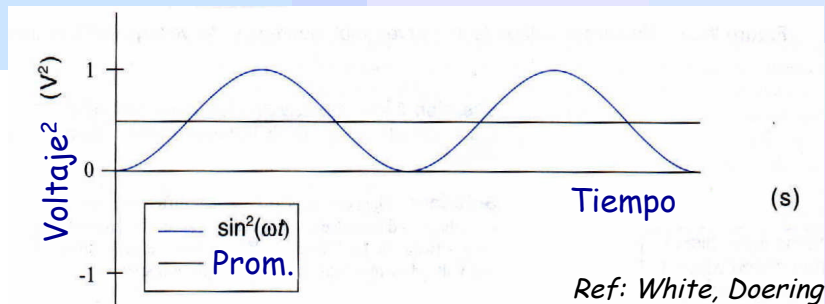
Concepto de Valor Efectivo o RMS

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Valor efectivo (rms) en
función de la potencia

$$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

Relación entre valor efectivo (rms)
y forma de onda original





Introducción (III)

Representación fasorial a través de Valor Efectivo

$$\bar{V} = V e^{j\varphi} = V [\cos \varphi + j \sin \varphi]$$

- La suma de dos funciones sinusoidales en el tiempo corresponde con la suma de vectores en el plano complejo.
- Derivadas y/o integrales de funciones del tiempo (capacidades, inductancias) se traducen en el plano complejo en giros de fasores. Ecuaciones diferenciales comunes se transforman en ecuaciones algebraicas.



Introducción (IV)

Diferenciación

$$F\{i(t)\} = F\{I_{\max} \cos(\omega t + \varphi)\} = I_{\max} e^{j\varphi}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d(I_{\max} \cos(\omega t + \varphi))}{dt}$$

$$= -\omega I_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \omega I_{\max} \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$F\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = F\left\{\omega I_{\max} \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})\right\}$$

$$= \omega I_{\max} e^{j\varphi + j\frac{\pi}{2}} = \omega F\{i(t)\} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega F\{i(t)\}$$

-Diferenciación -> fasor gira $\pi/2$ en contra del sentido del reloj y es amplificado en un factor ω

Integración

$$\int i(t) dt =$$



Introducción (V)

Voltaje en bobina

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\bar{U} = j\omega L \bar{I} = jX_L \bar{I}$$

X_L : reactancia inductiva

Voltaje en capacidad

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$\bar{U} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I} = -jX_C \bar{I}$$

X_C : reactancia capacitiva

Representación general de una impedancia

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = Z(\cos\varphi_z + j\sin\varphi_z)$$

-Definiciones asociadas: R , X , Y , G , B

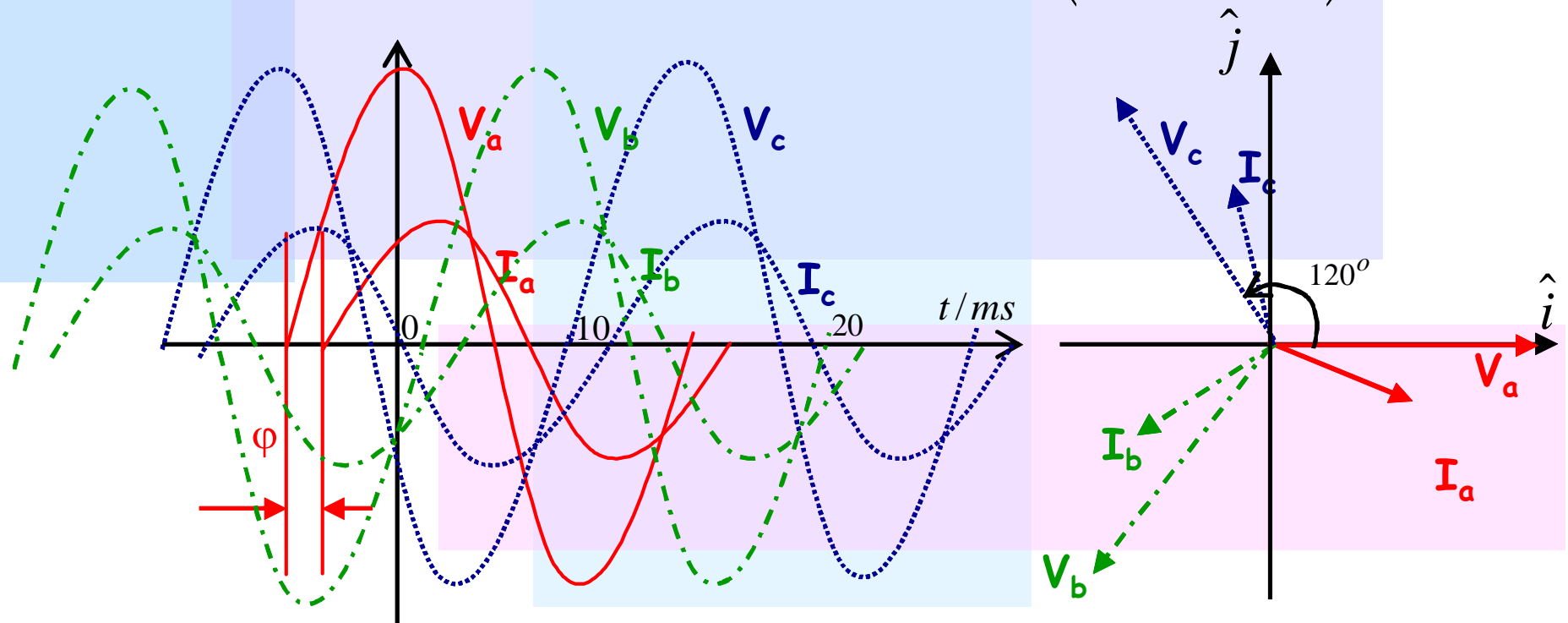


Sistemas de Corriente Alterna, Términos y Modelos (I)

Representación de sistemas trifásicos

- 3 tensiones de igual magnitud desfasadas en 120°
- Carga simétrica --> tres corrientes de igual magnitud y desfasadas en 120°

$$v_a(t) = V_{\max} \cos(\omega t) \quad v_b(t) = V_{\max} \cos(\omega t - 120^\circ)$$





Sistemas de Corriente Alterna, Términos y Modelos (II)

Relaciones válidas en sistemas equilibrados

$$\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c = 0$$

- factor de giro

$$\bar{a} = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$1 + \bar{a} + \bar{a}^2 = 0$$

$$\bar{a}^2 = e^{j240^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- relaciones adicionales

$$1 - \bar{a}^2 = \sqrt{3}e^{j30^\circ} = -j\bar{a}\sqrt{3}$$

$$\bar{a} - 1 = \sqrt{3}e^{j150^\circ} = -j\bar{a}^2\sqrt{3}$$

$$\bar{a}^2 - \bar{a} = \sqrt{3}e^{j270^\circ} = -j\sqrt{3}$$



Sistemas de Corriente Alterna, Términos y Modelos (III)

- Representación matemática de voltajes fase-neutro

$$\bar{V}_a = \bar{V}_a$$

$$\bar{V}_b = \bar{a}^2 \bar{V}_a$$

$$\bar{V}_c = \bar{a} \bar{V}_a$$

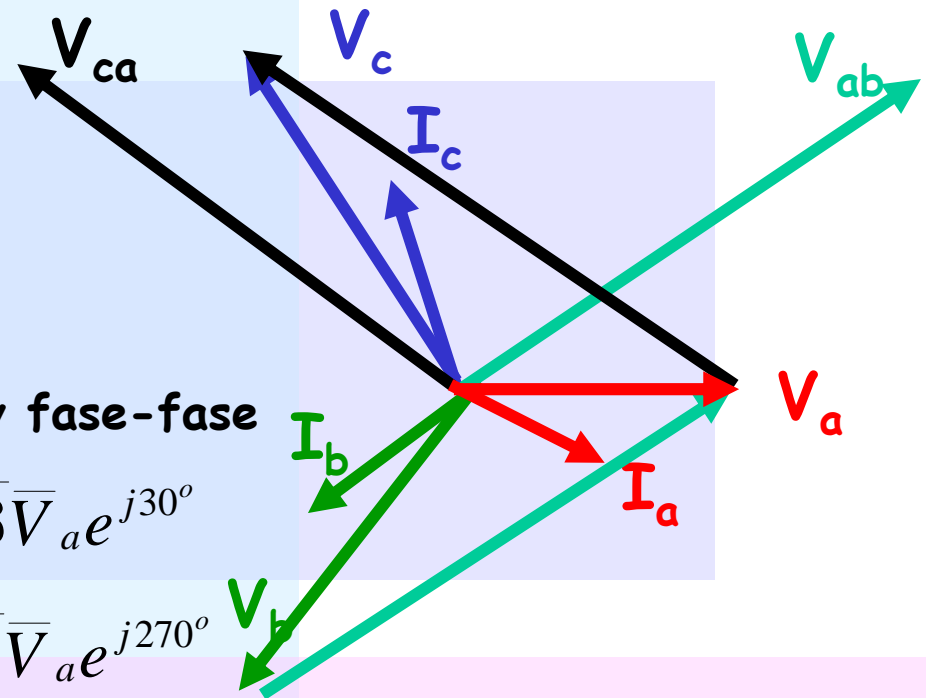
- Relación entre voltajes fase-neutro y fase-fase

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_a - \bar{V}_b = \bar{V}_a(1 - \bar{a}^2) = \sqrt{3}\bar{V}_a e^{j30^\circ}$$

$$\bar{V}_{bc} = \bar{V}_b - \bar{V}_c = \bar{V}_a(\bar{a}^2 - \bar{a}) = \sqrt{3}\bar{V}_a e^{j270^\circ}$$

$$\bar{V}_{ca} = \bar{V}_c - \bar{V}_a = \bar{V}_a(\bar{a} - 1) = \sqrt{3}\bar{V}_a e^{j150^\circ}$$

Esta operación puede realizarse en forma análoga para las corrientes respectivas.





Sistemas Equilibrados (I)

Cargas simétricas en conexión estrella

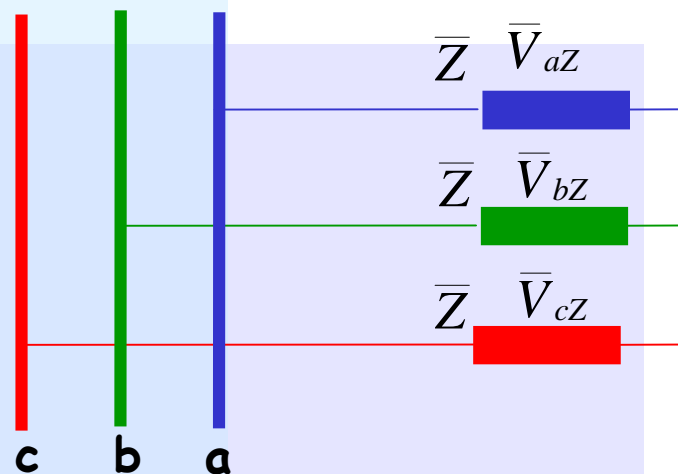
$$\bar{Z} = Ze^{j\varphi_z} = R + jX$$

Corrientes resultantes

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{az}}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{bz}}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{cz}}{\bar{Z}}$$

$$\bar{I}_a = a\bar{I}_b = a^2\bar{I}_c$$

Conexión estrella Y



Corriente por el neutro

$$\bar{I}_N = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

Razón por la cual es posible eliminar conductor neutro

$$V_{\Delta} = \sqrt{3}V_{\lambda} \quad I = I_{\lambda}$$



Sistemas Equilibrados (II)

Cargas simétricas en conexión delta

$$\bar{Z} = Ze^{j\varphi_z} = R + jX$$

Corrientes resultantes

$$\bar{I}_{ab} = \frac{\bar{V}_{ab}}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_{bc} = \frac{\bar{V}_{bc}}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_{ca} = \frac{\bar{V}_{ca}}{\bar{Z}}$$

Para el circuito en Delta se cumple

$$\bar{I}_{ab} + \bar{I}_{bc} + \bar{I}_{ca} = \frac{1}{\bar{Z}} (\bar{V}_{ab} + \bar{V}_{bc} + \bar{V}_{ca}) = 0$$

$$\bar{I}_a = -\bar{I}_{ca} + \bar{I}_{ab}$$

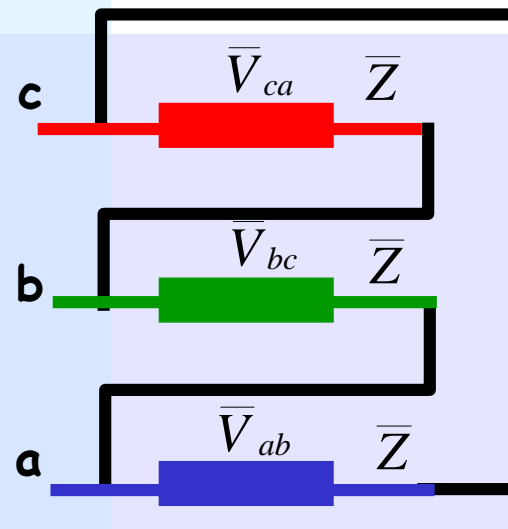
$$\bar{I}_b = \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab}$$

$$\bar{I}_c = \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc}$$

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

$$\Rightarrow V = V_{\Delta} \quad I = \sqrt{3}I_{\Delta}$$

Conexión delta Δ



¿Qué sucede en un cambio de conexión de estrella a delta, para el caso de cargas iguales?



Equivalentes Monofásicos (I)

Representación fasorial de consumos trifásicos

- Relación válida en general para consumos trifásicos

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \\ \bar{C} & \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix}$$

Red constituida por
elementos pasivos !

**Matriz
cíclica !!**

- Caso particular: conexión
simétrica, sin considerar
acoplamiento entre conductores

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix}$$

- Caso particular: conexión
simétrica, considerando
acoplamiento entre conductores

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix}$$



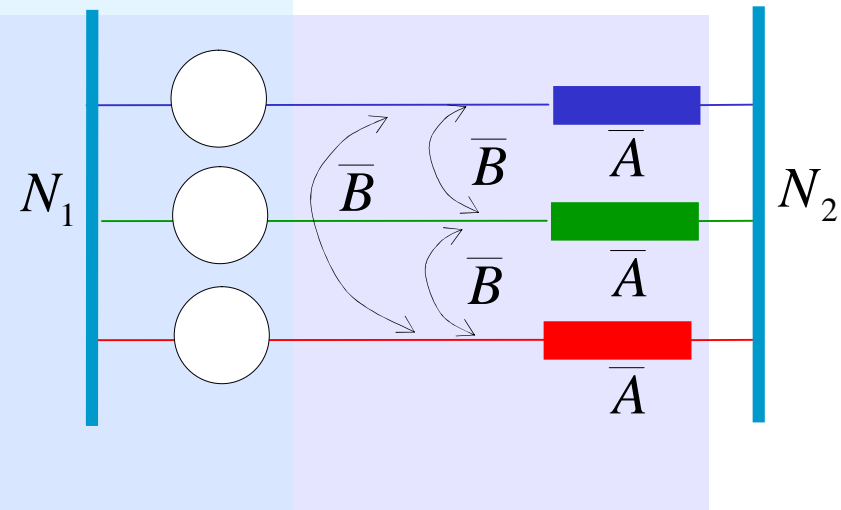
Equivalentes Monofásicos (II)

- Suficiencia de representación monofásica

$$\bar{I}_N = 0; \longrightarrow \bar{I}_a = -(\bar{I}_b + \bar{I}_c)$$

$$\bar{V}_a = \bar{A}\bar{I}_a + \bar{B}(\bar{I}_b + \bar{I}_c)$$

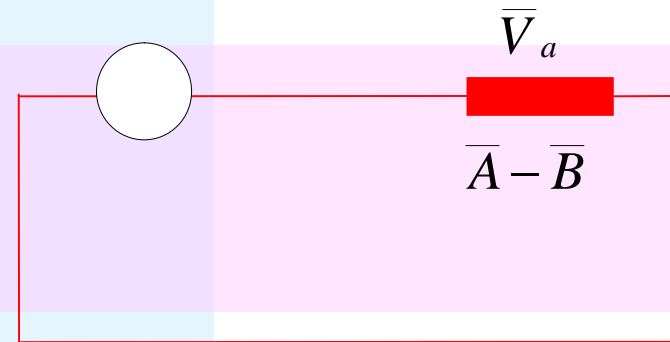
$$\longrightarrow \frac{\bar{V}_a}{\bar{I}_a} = (\bar{A} - \bar{B})$$



Análogamente para otros conductores

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix}$$

**Matriz
cíclica
y simétrica**



$$N_1 = N_2 = N$$



Potencia en Sistemas Alternos (I)

Potencia instantánea

$$v(t) = V_{\max} \sin(\omega t) \longrightarrow V \angle 0$$

$$i(t) = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi) \longrightarrow I \angle -\varphi$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

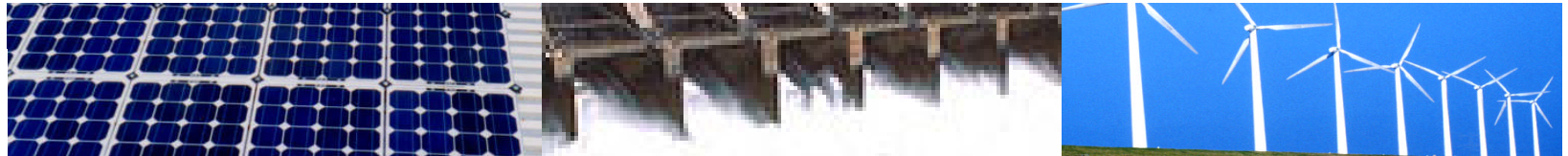
Propiedad
trigonométrica

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_{\max} I_{\max}}{2} (\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi))$$

Potencia
aparente

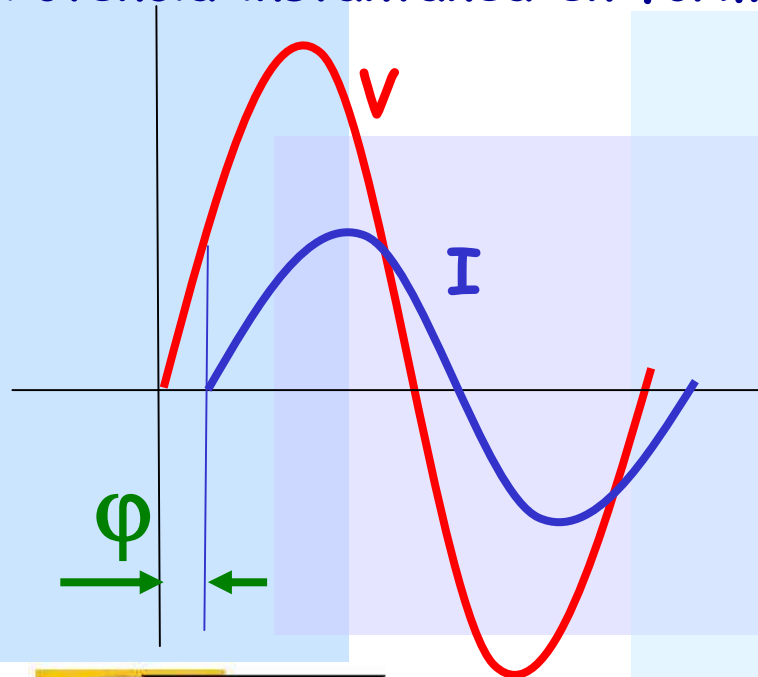
$$= VI \cos(\varphi) - VI \cos(2\omega t - \varphi)$$

Potencia instantánea transmitida: forma sinusoidal, doble de la frecuencia de la tensión aplicada, oscila en torno a valor promedio (potencia media, real o activa).



Potencia en Sistemas Alternos (II)

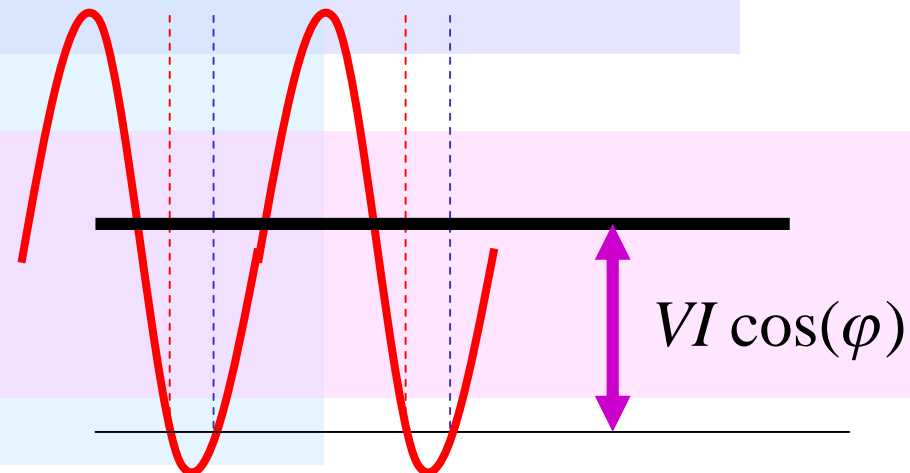
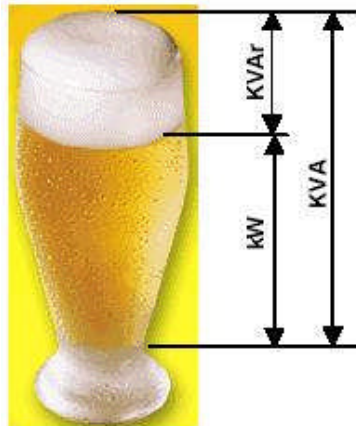
Potencia instantánea en forma gráfica



$$p(t) = VI \cos(\varphi) - VI \cos(2\omega t - \varphi) \\ = P(1 - \cos(2\omega t)) - Q \sin(2\omega t)$$

$$P = VI \cos(\varphi) \text{ Potencia activa (MW)}$$

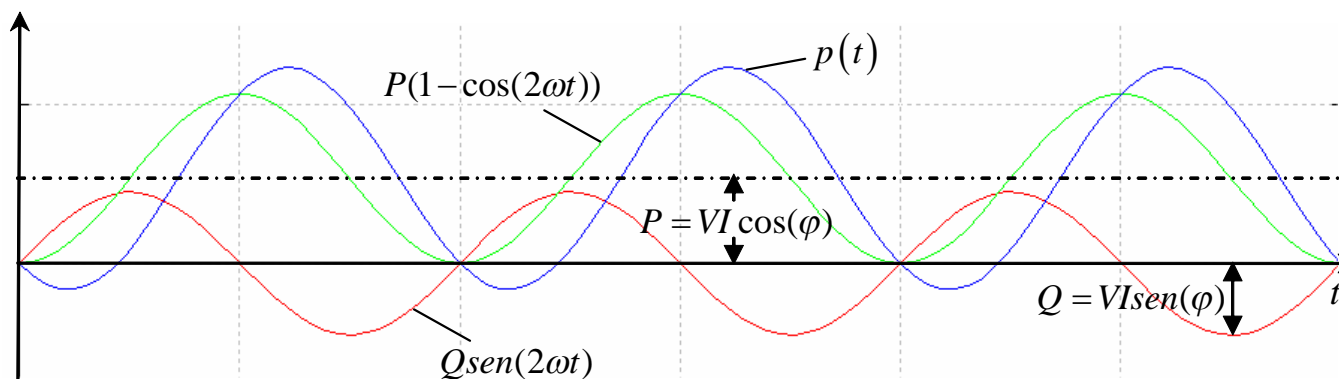
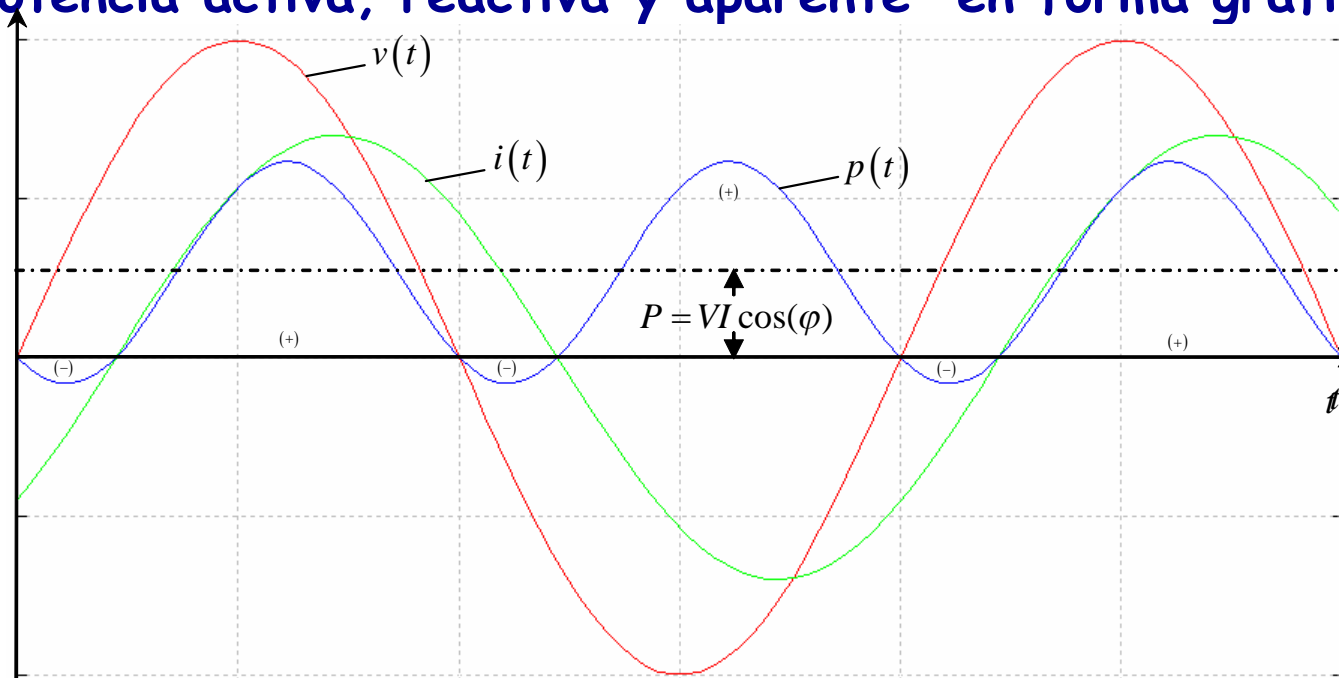
$$Q = VI \sin(\varphi) \text{ Potencia reactiva (MVar)}$$





Potencia en Sistemas Alternos (III)

Potencia activa, reactiva y aparente en forma gráfica





Potencia en Sistemas Alternos (IV)

Potencia fasorial o potencia compleja \bar{S}

$$\bar{V} = V \angle 0^\circ$$

$$\bar{I} = I \angle -\varphi$$

$$\bar{S} = \bar{V} \bar{I}^* = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi$$

$$= P + jQ = \bar{Z} \bar{I} \bar{I}^* = \bar{Z} |\bar{I}|^2$$

Circuito trifásico

$$p_{3\phi} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c$$

$$= 2VI \left[\sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) + \sin(\omega t - 120^\circ) \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi) + \sin(\omega t - 240^\circ) \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi) \right]$$

$$p_{3\phi} = VI \left[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(\varphi) - \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi) + \cos(\varphi) - \cos(2\omega t - 480^\circ - \varphi) \right]$$

$$p_{3\phi} = 3VI \cos \varphi = 3V_{f-n} I \cos \varphi = \sqrt{3} V_{f-f} I \cos \varphi = 3p_{1\phi}$$

La potencia instantánea trifásica es constante y vale 3 veces la potencia media de cada fase. De lo anterior se desprende que no existe una potencia reactiva trifásica (si existe por cada una de las fases --> caso similar al de las corrientes).



Magnitudes y Cálculo en por Unidad (I)

Definición

Un sistema en „por unidad“ o en „tanto por uno“ se realiza expresando las diversas magnitudes eléctricas (V, I, Z, etc.) como proporciones de magnitudes base o de referencia apropiadas:

$$\longrightarrow Valor(pu) = Valor[o/1] = \frac{Valor_{real}}{Valor_{base}}$$

Ventajas

- Debido a que los valores reales se mueven entre fronteras estrechas, se facilita la detección de valores erróneos.
- Se simplifica el trabajo a través de distintos niveles de tensión, debido a que en el modelo equivalente no es necesario considerar el transformador ideal. Estos pueden ser reemplazados por su impedancia serie equivalente
- En el sistema expresado en „por unidad“, los valores de los voltajes son cercanos a uno.



Magnitudes y Cálculo en por Unidad (II)

Sistemas Monofásicos

- V , I , S , Z , son cantidades relacionadas entre sí --> fijando dos valores --> se fijan los otros dos.
- Generalmente se emplea la tensión V_B (kV) y la potencia aparente S_B (MVA) como bases de referencia --> bases de corriente (A) e impedancia (Ω) se calculan posteriormente

$$I_B = \frac{S_B}{V_B}$$

$$Z_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{V_B^2}{S_B}$$



$$S_B = V_B I_B = V_B \frac{V_B}{Z_B} = \frac{V_B^2}{Z_B}$$

- Valores base son escalares !



$$Z_B = X_B = R_B$$

$$P_B = Q_B = S_B$$

- Forma general de cálculo para magnitudes conocidas!

$$V_{pu} = \frac{V}{V_B} \frac{\text{Volts}}{\text{Volts}}$$

$$I_{pu} = \frac{I}{I_B} \frac{\text{Amp.}}{\text{Amp.}}$$

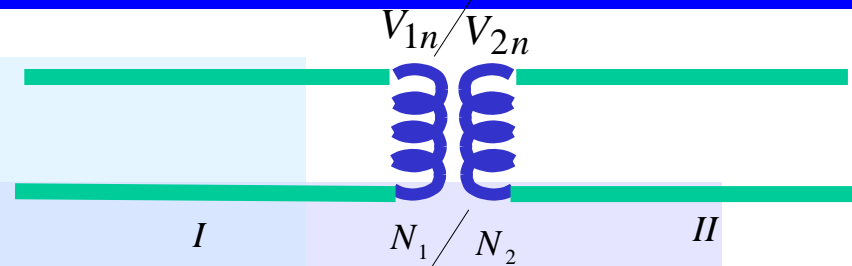
$$S_{pu} = \frac{S}{S_B} \frac{\text{VoltAmp.}}{\text{VoltAmp.}}$$

$$Z_{pu} = \frac{Z}{Z_B} \frac{\text{Ohm}}{\text{Ohm}}$$



Magnitudes y Cálculo en por Unidad (III)

- Transformador



- Transformador con razón de transformación $N_1:N_2$ e impedancia serie Z
- Suponemos impedancia referida al lado I, Z_1

- Z_1 puede ser referido al lado II como $\Rightarrow Z_2 = \left[\frac{N_2}{N_1} \right]^2 Z_1$

- Definiendo impedancias base para cada uno de los sectores se obtiene:

$$Z_{BI} = \frac{V_{BI}^2}{S_B} \quad Z_{BII} = \frac{V_{BII}^2}{S_B} \quad \Rightarrow \quad Z_1(pu) = \frac{Z_1 S_B}{V_{BI}^2} \quad Z_2(pu) = \frac{Z_2 S_B}{V_{BII}^2}$$

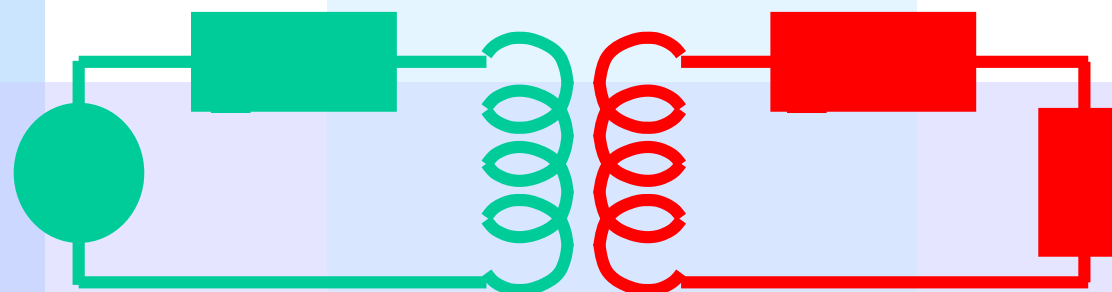
$$Z_2(pu) = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{V_{BI}^2}{V_{BII}^2} Z_1(pu) \quad \Rightarrow \quad Z_2(pu) = \left[\frac{N_2}{N_1} \right]^2 \frac{V_{BI}^2}{V_{BII}^2} Z_1(pu)$$

Si $\frac{V_{BII}}{V_{BI}} = \frac{N_2}{N_1} \quad \Rightarrow \quad Z_2(pu) = Z_1(pu)$



Magnitudes y Cálculo en por Unidad (IV)

Situación de cálculo en pu en sistema monofásico



Generador
datos
entregados
en base propia
10 MVA
15 kV

Transformador
datos
entregados
en base propia
25 MVA
10:100 kV

Datos de Línea
y consumos
entregados en otras
bases

Seleccionar una potencia base común para todo el sistema (ejemplo 10 MVA)

Voltajes base para el sector verde y rojo deben ser elegidos, de forma que la razón entre ellos sea 1:10 (ejemplo 10 kV (verde) y 100 kV (rojo))

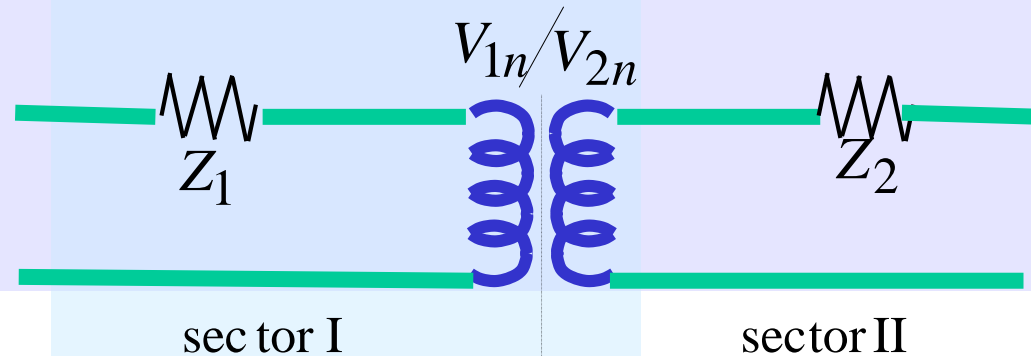


Magnitudes y Cálculo en por Unidad (V)

Operatoria General

- 1- Se elige una potencia base S_B común a todo el sistema
- 2- Se elige una tensión base en alguno de los sectores. Criterio de simplicidad para calcular otras tensiones base en el sistema
- 3- Las tensiones base en los sectores deben cumplir las relaciones

$$\frac{V_{BI}}{V_{BII}} = \frac{V_{1n}}{V_{2n}}$$



- 4- Teniendo V_B y S_B en cada sector --> impedancias en por uno (cuidado con valores expresados en base propia !)

$$Z(\text{pu base 1}) = Z(\text{pu base 2}) \frac{S_{B1}}{S_{B2}} \left(\frac{V_{B2}}{V_{B1}} \right)^2$$



Magnitudes y Cálculo en por Unidad (VI)

Sistemas trifásicos

Para los sistemas trifásicos se tienen las mismas ventajas y procedimientos antes señalados, en la medida que se respeten las siguientes reglas:

1- Se hace uso de una potencia base trifásica común para todo el sistema

$$S_{\text{base } 3\phi} = 3S_{\text{base } 1\phi}$$

2- Una vez elegido un voltaje base en un punto del sistema, los voltajes base para otros sectores deben variar acorde a la razón de transformación fase-fase de los transformadores.

3- Fórmulas convenientes que relacionan sistemas trifásicos y monofásicos

$$S_{\text{base } 1\phi} = V_{\text{base } f-n} I_{\text{base}}$$

$$I_{\text{base } 1\phi} = \frac{S_{\text{base } 1\phi}}{V_{\text{base } 1\phi}} = \frac{S_{\text{base } 3\phi} / 3}{V_{\text{base } f-f} / \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{S_{\text{base } 3\phi}}{V_{\text{base } 3\phi}}$$

$$Z_{\text{base}} = \frac{V_{\text{base } f-n}^2}{S_{\text{base } 1\phi}} = \frac{\left[\frac{V_{\text{base } f-f}}{\sqrt{3}} \right]^2}{\frac{S_{\text{base } 3\phi}}{3}} = \frac{V_{\text{base } f-f}^2}{S_{\text{base } 3\phi}}$$