Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Eléctrica
EL42D – Control de Sistemas.

Pauta Pregunta 2 (Examen 24 de noviembre 2006)

Profesora: Dra. Doris Sáez H. *dsaez@ing.uchile.cl*
Profesor Auxiliar: David Clavijo C. *dclavijo@ing.uchile.cl*

a) Características del sistema en el lazo abierto.

$$\overset{o}{X}_1 = -X_1 + 2X_2$$
$$\overset{o}{X}_2 = -10X_1 + U$$

$$\begin{pmatrix} \overset{o}{X}_1 \\ \overset{o}{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} * U$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + s + 20}$$

Un sistema es controlable en el tiempo t_o si se puede llevar de cualquier estado inicial $X(t_o)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Si Cont=$[B \quad AB]$ tiene rango 2 es controlable

$$Contr = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determínate $\det(Contr) = -2$

Luego tiene rango 2

Un sistema es observable en el tiempo t_o si con el sistema en el estado $X(t_o)$ es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo finito.

Si $obs = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$ tiene rango 2 es observable

Obs= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Determínate de Obs= 2 es distinto de cero luego es invertible de rango 2

Luego el sistema es controlable y observable

Estabilidad

Al ver la función de transferencia:

$$G(s) = C(SI - A)^{-1} B = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + s + 20}$$

Sus polos son:

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{79}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I\sqrt{79}$$

Luego están en el semiplano izquierdo la parte real -> son estables

b) Controlador en variables de estado talque:
Sobrenivel máximo sea de un 10%
tiempo de estabilización sea de 5 segundos.

Ecuación característica:

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

$$\det(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}) = 0$$

$$\det(\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 10+K_1 & s+K_2 \end{bmatrix})$$

$$(s+1)(s+k_2) + 2(10+k_1) = 0$$

$$s^2 + s(1+k_2) + (20 + 2K_1 + k_2) = 0$$

Dados los requerimientos se tiene:

$$\varepsilon = 0.5913$$

$$\omega_n = 1.0822$$

Luego

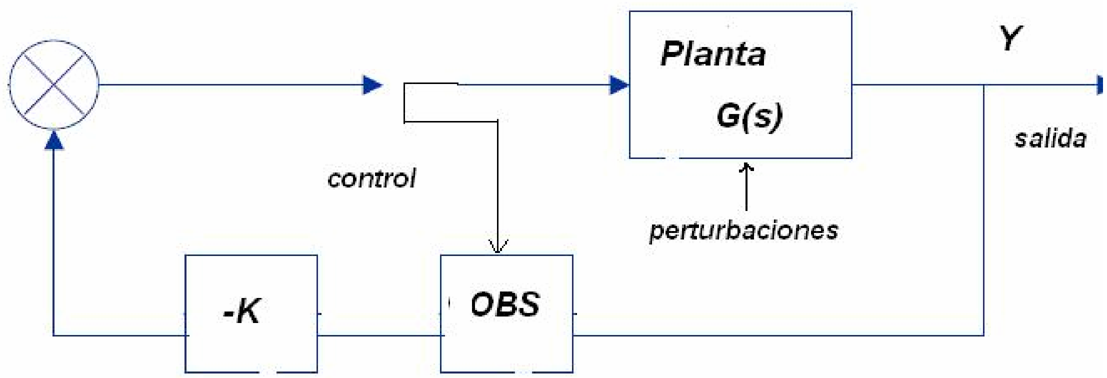
(s-(-0.639+0.8725 i)(s-(-0.639-0.8725 i)))=0

$$s^2 + s(1.278) + 1.1695 = 0$$

Igualando polinomios se tiene:

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.55425 \\ 0.278 \end{bmatrix}$$

c) Plantear un diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado correspondiente a la propuesta b).



d) Diseñar un controlador proporcional integral talque el sobrenivel máximo sea de un 10% y que el tiempo de estabilización sea de 5 segundos. Utilizando el método de LGR.

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\varepsilon = 0.5913$$

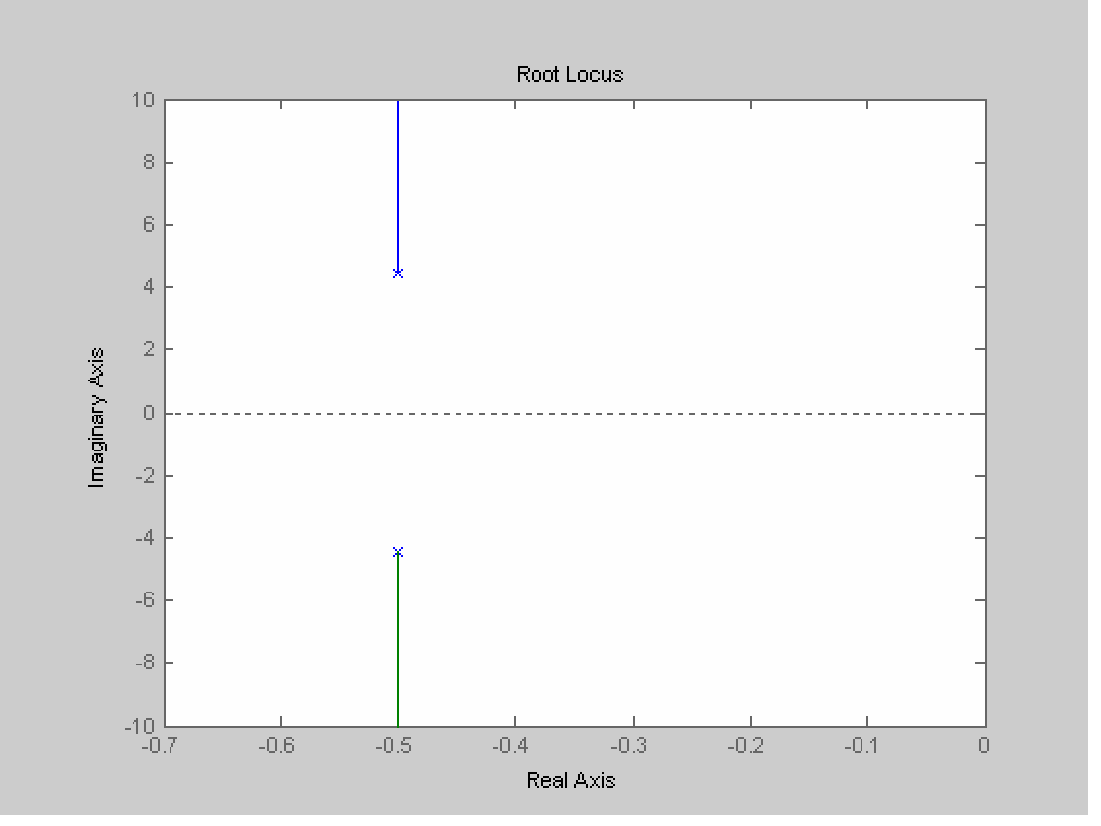
$$\omega_n = 1.0822$$

Polos:

S1=(-0.639+0.8725 *i)

S2=(-0.639-0.8725 *i)

Lugar geométrico de las raíces



$$1 + Gc(s)\frac{2}{s^2 + s + 20} = 0$$

$$s^2 + s + 20 + k = 0$$

$$Gc(s) = Kp + \frac{Ki}{s}$$

$$Gc(s) = \frac{Kp * s + Ki}{s}$$

$angulo(Gc) + anguloG(s) = 180$ Grados evaluado en el polo.

Aporte planta 0.73 grados

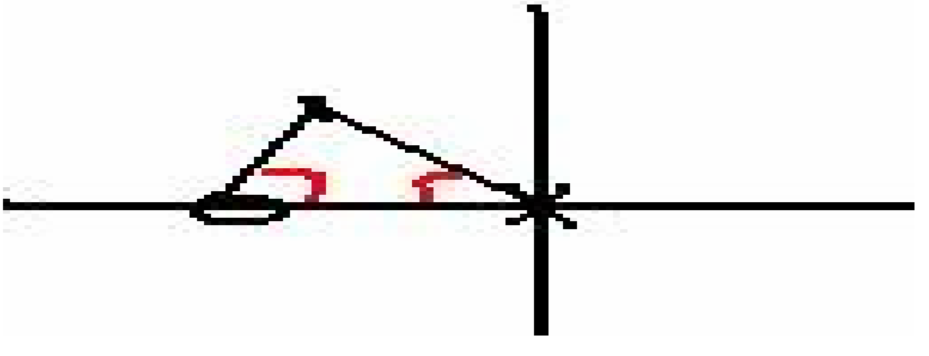


Figura 2

Condición de modulo para el control PI se tiene una ecuación en la cual hay 3 incógnitas Kp y Ki .
La segunda ecuación para determinar el problema nos la entrega la condición de ángulo(ver figura 2):

Condición de ángulo aporte de 179.27 grados

Luego resolviendo las ecuaciones se llega :
Angulo(Gc(s))=177
Estas condiciones se calcularon para el polo del semiplano izquierdo superior

$$Gc(p) = \frac{(-0.64 + i * 087) * Kp + KI}{-0.64 + i * 0.87}$$

Llamemos

$$alfa = (-0.64 * Kp + Ki)$$
$$beta = i * 0.87 * Kp$$
$$\frac{Beta}{alfa} = -1.401$$
$$arctg = (beta / alfa) = -54.49$$

$$\text{Abs}(Gc(s)\frac{2}{s^2 + s + 20}) = 1$$

Resolviendo se determinan los valores de:

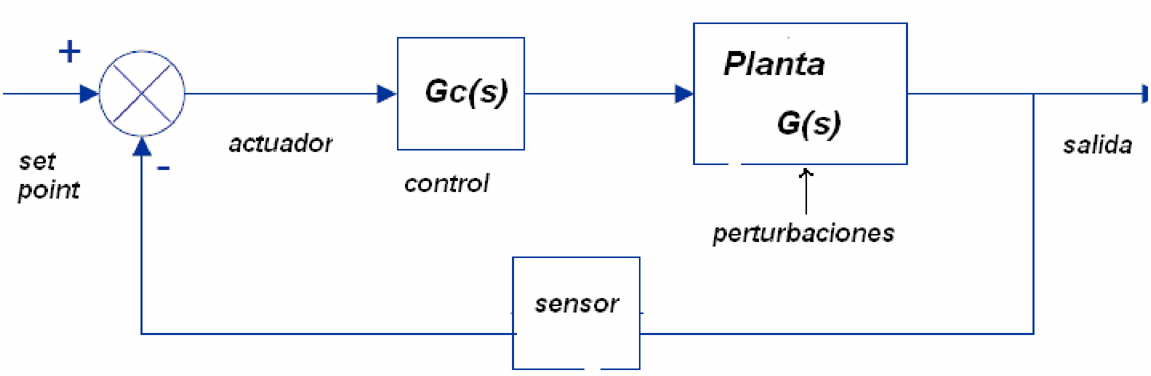
Kp=-9.5936

Ki=-0.1623

Finalmente el sistema controlado queda:

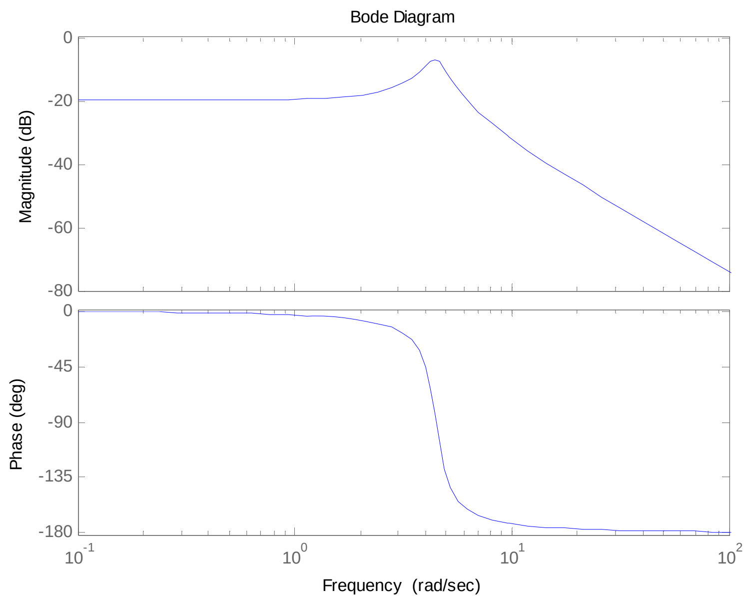
$$G(s)*Gc(s) = \frac{-2(9.59s+0.162)}{20s+s^2+s^3}$$

e) Plantear un diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado correspondiente a la propuesta d).

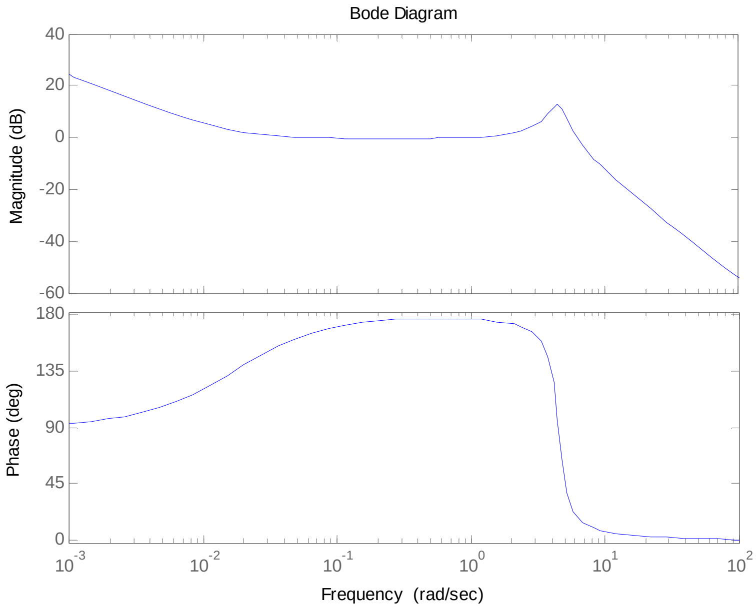


f) Diagrama de bode del sistema sin compensar y compensado .

Diagrama de bode sistema sin compensar:



Sistema compensado: en D)

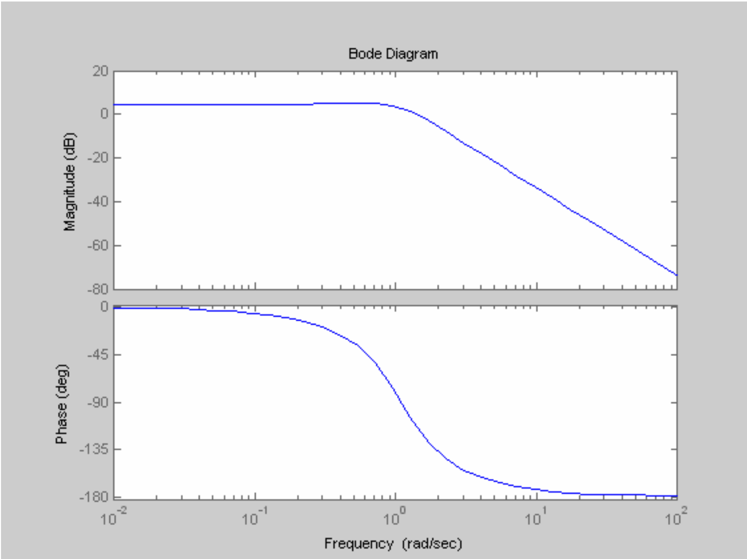


Sistema compensado en B)

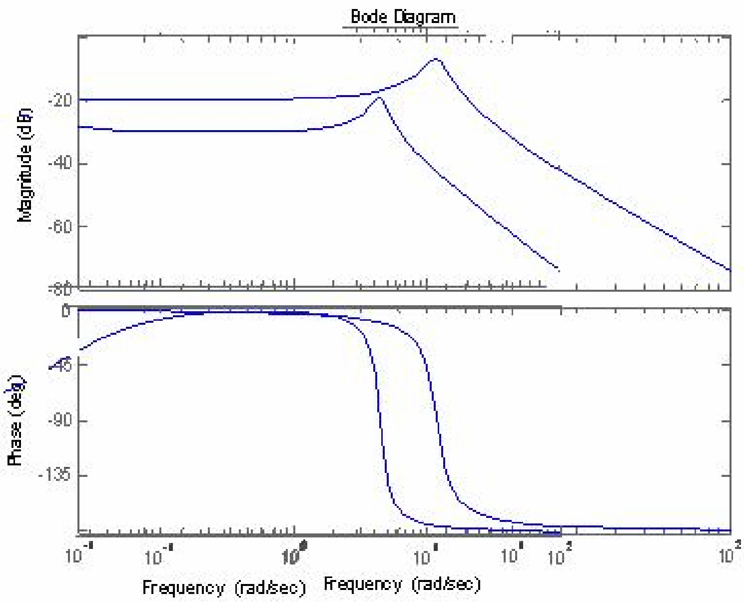
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9{,}55 & 0.278 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.45 & -0.278 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(SI - \bar{A})^{-1} B = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2..2 * 10^{-15} s^2 + 2.2 * 10^{-14} s + 2}{s^2 + 1.278 s + 1.178}$$



Comparación



Se pueden hacer conclusiones respecto del margen de fase y el margen de ganancia .(Hablar sobre que en cada caso son infinito los márgenes de ganancia y fase) En la figura el sistema controlado es el que se encuentra mas a la derecha .

g) Diseño alternativo en variables de estado, al planteado en B.

Control Óptimo Cuadrático

Se considera el diseño de sistemas de control basado en los índices de desempeño cuadrático

Seleccionar el vector de control u(t) tal que un índice de desempeño determinado se minimice.

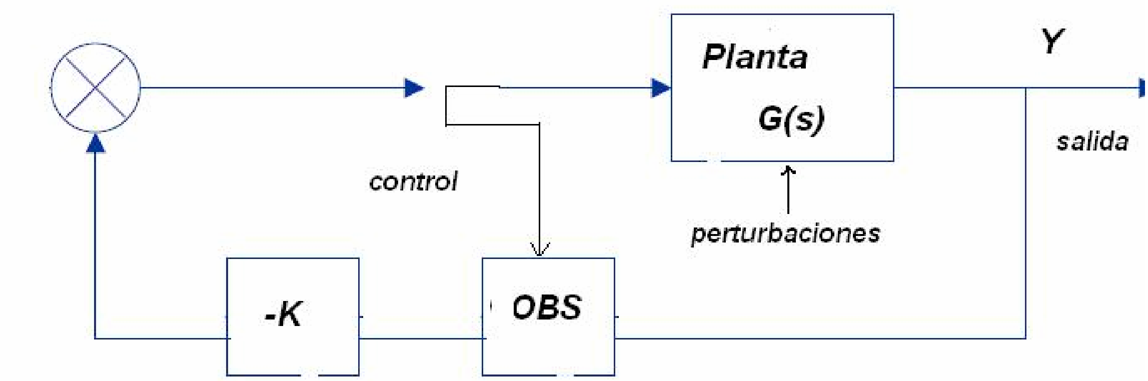
$$J = \int_0^\infty L(x,u)dt$$

Solución:
Considerando que:

$$\underset{u}{\text{Min}}\ J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt$$

donde Q es una matriz simétrica definida positiva, y R es una matriz simétrica definida positiva, u no está restringida.

Diagrama de bloques del control



$$H = x^T Q x + u^T R u + \lambda(Ax + Bu)$$

Cuya solución es la ecuación de Ricatti

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

En resumen
1.- Resolver la ecuación matricial de Ricatti para la matriz P. (Si existe una matriz P definida positiva, el sistema es estable o la matriz A-BK es estable).

2.- Sustituya la matriz P en la ecuación (*). La matriz K resultante es la matiz óptima.

(*)

$$u = -\underbrace{R^{-1}B^{T}P}_{K}X$$

h)

Tabla 1

	Ventajas	**Desventajas**
Método en variable de estado	Es aplicable a sistemas MIMO	Para su diseño requiere de un observador de estado por lo cual introduce ruido
Método basado en LGR	Sirve para sistemas de alto orden . Entrega una respuesta rápida y no con tantos desarrollos numéricos	Complejo para sistemas MIMO. No es tan preciso ya que es una herramienta grafica.
Control en frecuencia	Sirve para sistemas de alto orden . Herramientas graficas en frecuencia Bode , estabilidad nyquist	Soluciones aproximadas de la interpretación grafica . Requiere tratamiento especial para sistemas discretos