EL 42D
Control de Sistemas

Profesora: Dra. Doris Sáez H.
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

ANEXO A: Variables de Estado

Elaborado por: D. Sáez
Colaborador: R. Flores & J. Contreras

Representación de Sistemas Lineales en Variables de Estado

x(t): Variables de Estado.
Ecuaciones de Estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

A, B, C, D matrices constantes. Aplicando Laplace, se tiene

$$SX(S) - X(0) = AX(S) + BU(S)$$

$$X(S) = (SI - A)^{-1} X(0) + (SI - A)^{-1} BU(S)$$

Función de Transición de Estado: $\phi(S) = (SI - A)^{-1}$

Representación de Sistemas Lineales en Variables de Estado

Si $X(0)=0$

$$X(S)=(SI-A)^{-1}BU(S)$$

$$Y(S)=CX(S)+DU(S)$$

$$\Rightarrow Y(S)=C(SI-A)^{-1}BU(S)+DU(S)$$

$$Y(S)=(C(SI-A)^{-1}B+D)U(S)$$

$$G(S)=C(SI-A)^{-1}B+D=\frac{Y(S)}{U(S)}$$

Representación de Sistemas Lineales en Variables de Estado

Solución de Ecuación de Estado:

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Matriz de Transición de Estado: $\phi(t) = e^{At}$

Polinomio Característico: $\det(SI - A) = 0$

del cual se pueden obtener los polos del sistema

Análisis en Variables de Estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Matriz de Transición de Estado:

$$\phi(t) = L^{-1}((SI - A)^{-1}) = e^{At}$$

$$e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \ldots$$

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Relación entre Ecuaciones en Variables de Estado y Ecuaciones Diferenciales de Alto Orden

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\ldots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0 y(t)=u(t)$$

$$x_1(t)=y(t)$$

$$x_2(t)=\frac{d}{dt}y(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n(t)=\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)$$

Análisis en Variables de Estado

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}x_n(t) = -a_0 x_1(t) - \ldots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + u(t)$$

De las ecuaciones anteriores se construye el siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Análisis en Variables de Estado

Donde A, B y C son de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

La cual corresponde a la forma Canónica Controlable.

Nota: La representación en de un sistema en Variables de Estado no es única.

Relación entre Variables de Estado y Función de Transferencia

$$Y(S) = (C(SI - A)^{-1}B + D)U(S)$$

Polinomio Característico: $\det(SI - A) = 0$

polos del sistema o valores propios de A.

Transformaciones

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Consideremos transformar la representación en variables de estado en otra representación en variables de estado.

$$x(t) = P\overline{x}(t)$$
$$\Rightarrow \overline{x}(t) = P^{-1}x(t)$$

P matriz no singular

Transformaciones

Donde es una matriz no singular.
Aplicando la transformación se obtiene la siguiente representación:

$$\dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t)$$

$$y(t) = \overline{C}\overline{x}(t) + \overline{D}u(t)$$

Lo que es lo mismo:

$$\dot{\overline{x}}(t) = P^{-1}AP\overline{x}(t) + P^{-1}Bu(t)$$

$$y(t) = CP\overline{x}(t) + Du(t)$$

Entonces,

$$\overline{A} = P^{-1}AP \qquad \overline{C} = CP$$

$$\overline{B} = P^{-1}B \qquad \overline{D} = D$$

Propiedades de las Transformaciones

Polinomio Característico:

$$\det(SI - \overline{A}) = 0$$

$$\det(SP^{-1}P - P^{-1}AP) = 0$$

$$\det(P^{-1}(SI - A)P) = 0$$

$$\det(P^{-1})\det(SI - A)\det(P) = 0$$

$$\det(SI - A) = 0$$

Propiedades de las Transformaciones

Función de Transferencia:

$$\overline{G}(S) = \overline{C}(SI - \overline{A})^{-1}\overline{B} + \overline{D}$$

$$= CP(SP^{-1}P - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D$$

$$= CP(P^{-1}(SI - A)P)^{-1}P^{-1}B + D$$

$$= CPP^{-1}(SI - A)^{-1}PP^{-1}B + D$$

$$= C(SI - A)^{-1}B + D = G(S)$$

La ecuación característica y la función de transferencia son indiferente a la representación en variable de estado que se encuentre el sistema.

Forma Canónica Controlable

Supongamos un sistema de 3er Orden.

$$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\overline{y} = \begin{bmatrix} -b_0 & -b_1 & -b_2 \end{bmatrix} \overline{x}$$

$$\overline{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forma Canónica Controlable

Entonces,

$$B = P\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = p_3$$

$$AP = P\overline{A} = \begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_0p_3 & p_1 - a_1p_3 & p_2 - a_2p_3\end{bmatrix}$$

Forma Canónica Controlable

Luego,

$$Ap_1 = -a_0 p_3$$
$$Ap_2 = p_1 - a_1 p_3$$
$$Ap_3 = p_2 - a_2 p_3$$

Como $p_3 = B$ **entonces la eq. queda:**

$$p_2 = a_2 B + AB$$

Entonces, $p_1 = a_1 B + a_2 AB + A^2 B$

Forma Canónica Controlable

Luego,

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si generalizamos, la ec.Característica:

$$\det(SI - A) = S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0 = 0$$

Transformación: $P = SM$

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Matriz de controlabilidad

Forma Canónica Controlable

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Siempre invertible det(M)=(-1)$^n \neq 0$

Entonces se obtiene el sistema transformado:

$$\dot{\overline{x}} = \overline{A}\overline{x} + \overline{B}u$$

Forma Canónica Controlable

con

$$\overline{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forma Canónica Observable

$$x(t) = Q\tilde{x}(t)$$

$$\tilde{A} = P^{-1}AP \qquad \tilde{B} = P^{-1}B \qquad \tilde{C} = CP \qquad \tilde{D} = D$$

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CQ = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma Canónica Observable

$\tilde{B}$ y $\tilde{D}$ No están restringidas

$$Q = (MV)^{-1}$$

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Forma Canónica Controlable

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b_{n-1}S^{n-1} + b_{n-2}S^{n-2} + \ldots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

Forma Canónica Observable

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

Controlabilidad:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

Definición: "Un sistema discreto es totalmente controlable si existe u(k) definido sobre un número finito de muestras tal que dada cualquier condición inicial el estado x(k) puede llegar a un estado deseado x_f en n periodos de muestreo"

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

La solución del sistema discreto es:

$$x(n) = G^{n} x(0) + G^{n-1} Hu(0) + G^{n-2} Hu(1) + ... + Hu(n-1)$$

$$x(n) - G^{n} x(0) = \begin{bmatrix} H & GH & .... & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ . \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Matriz de controlabilidad: $\begin{bmatrix} H & GH & .... & G^{n-1}H \end{bmatrix}$

Debe ser invertible para que el sistema sea controlable.

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

Observabilidad:

$$x(k+1) = Gx(K) + Hu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Solución:

$$x(k) = G^{k} x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j)$$

$$y(k) = CG^{k} x(0) + \sum CG^{k-j-1} Hu(j) + Du(k)$$

G, H, C, D y u(k) son conocidos.

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

"Un sistema discreto es observable si dado y(k) sobre un número finito de muestras es posible determinar el estado inicial x(0)"

Análisis de Sistemas Discretos en Variables de Estado

$$x(K) = G^{K} x(0)$$

$$y(K) = CG^{K} x(0)$$

$$y(0) = Cx(0)$$

$$y(1) = CGx(0)$$

$$\vdots$$

$$y(n-1) = CG^{n-1} x(0)$$

Matriz de observabilidad: $\begin{bmatrix} C \\ CG \\ . \\ . \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$

Esta matriz debe ser invertible o rango n para que el sistema sea observable.

Forma Canónica Controlable

$$G(Z) = \frac{b_0 Z^n + b_1 Z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} Z + b_n}{Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} Z + a_n}$$

Ecuación característica:

$$\det(ZI - A) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots. + a_{n-1} Z + a_n = 0$$

$$\overline{x}(k+1) = \overline{A}\,\overline{x}(k) + \overline{B}u$$

$$y(k) = \overline{C}\,\overline{x}(k) + \overline{D}u$$

Forma Canónica Controlable

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{D} = D$$

Forma Canónica Observable

$$G(Z) = \frac{b_0 Z^n + b_1 Z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} Z + b_n}{Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} Z + a_n}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots. & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & : & : \\ : & & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & \ldots. & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ : \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots. & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{D} = D$$

ANEXO B.
Estabilidad de Sistemas

RESUMEN APUNTES Prof. M. Duarte

Colaborador: R. Flores

Estabilidad de Sistema

- Sea un sistema:

$$\dot{x} = f(x,t)$$

- Supongamos que x(t)=0 es solución, es decir,

$$0 = f(0,t)$$

- Supongamos que f(x,t) satisface las condiciones necesarias, de modo que si:

$$x(t_0) = 0$$

- La solución:

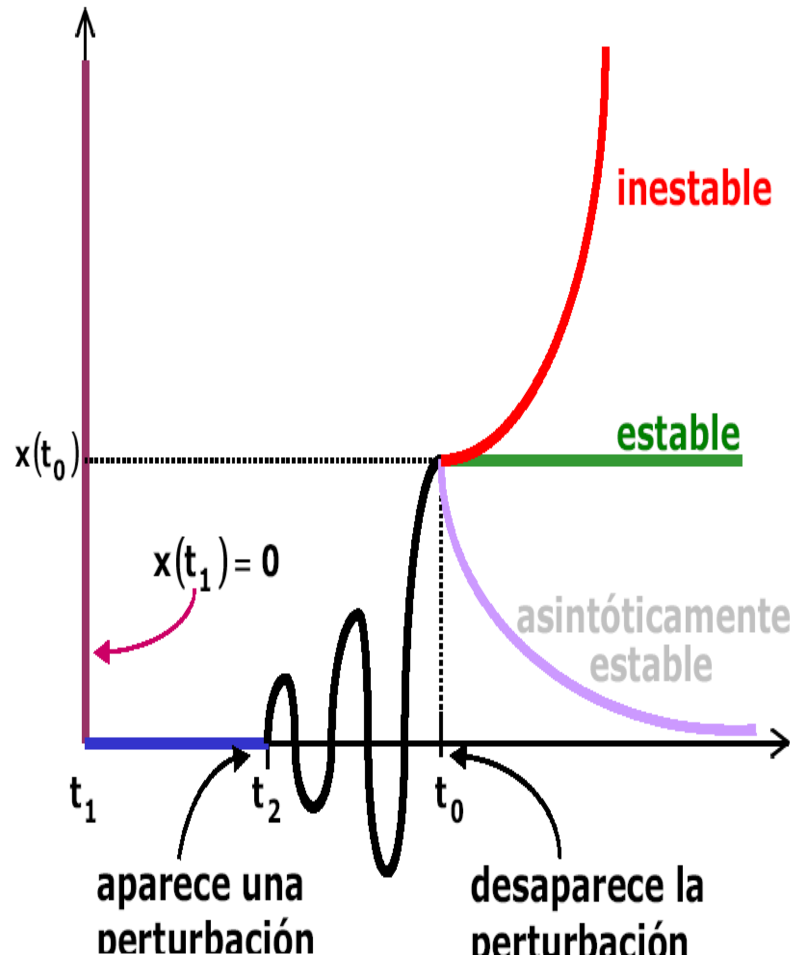
$$x(t) = 0 \qquad t>t0 \text{ es única}$$

Estabilidad de Sistema

Entre t1 y t2 se cumple la ecuación dinámica, luego:

$$x(t)=0$$

Entre t2 y t0 no se cumple la ecuación dinámica.



Estabilidad de Sistema

- Pueden suceder tres cosas:

1) La trayectoria se aparta de $x(t)=0$ para $t>t0$ ➔ Inestabilidad.
2) La trayectoria no se aparta de $x(t)=0$ para $t>t0$ ➔ estabilidad.
3) La trayectoria tiende a $x(t)=0$ para $t \rightarrow inf$ ➔ estabilidad asintótica.

Estabilidad de Sistema

- Puede suceder que la nueva condición inicial es muy cercana a la posición de equilibrio, el sistema sea estable

  ➔ Estabilidad Local

- Si para un cierto conjunto de condiciones iniciales, $x0 < M$, el sistema es estable

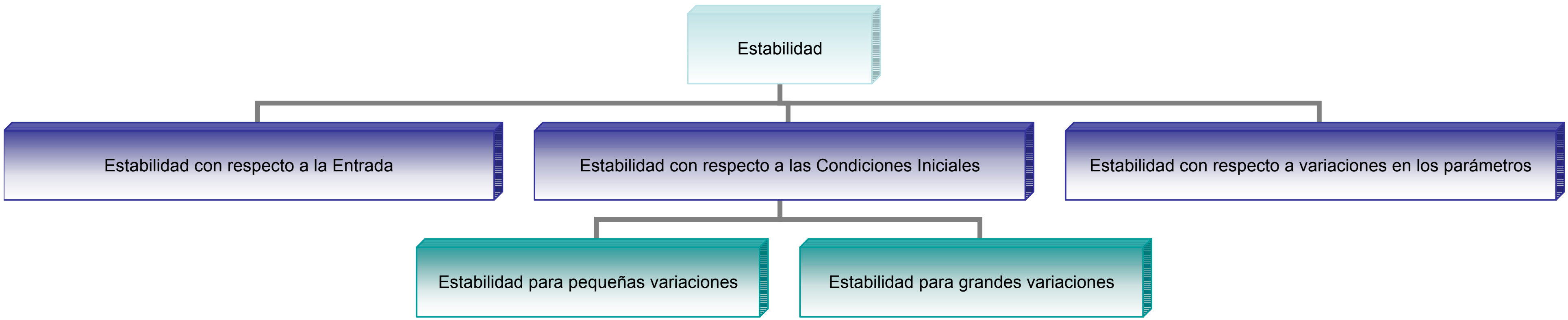
➔ $\{x0 / x0 < M\}$ es el dominio de estabilidad

Estabilidad de Sistema

- Si para toda condición inicial, no importa cuan grande sea, el sistema es estable

  → Estabilidad Global

Distintos Conceptos de Estabilidad



El estudio se hace para sistemas:

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

Si u es constante u_ε o función nula, un estado de equilibrio es tal que:

$$f(x_\varepsilon, u_\varepsilon, t) = 0 \qquad \forall\, t$$

Uno o varios estados de equilibrio

Para sistemas lineales:

$$0 = Ax_\varepsilon + Bu_\varepsilon$$
$$x_\varepsilon = -A^{-1}Bu_\varepsilon$$

El estado de equilibrio es único

Caso sistemas no lineales

Cambio de variable

Cuando un estado de equilibrio no corresponde al origen del espacio estado, se traslada

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\varepsilon}$$

Estudiaremos estabilidad con respecto a las condiciones iniciales.

Estabilidad de Sistemas Libres

Sistema Libre

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \\ f(x_\varepsilon, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0 \end{array}\right\}$$

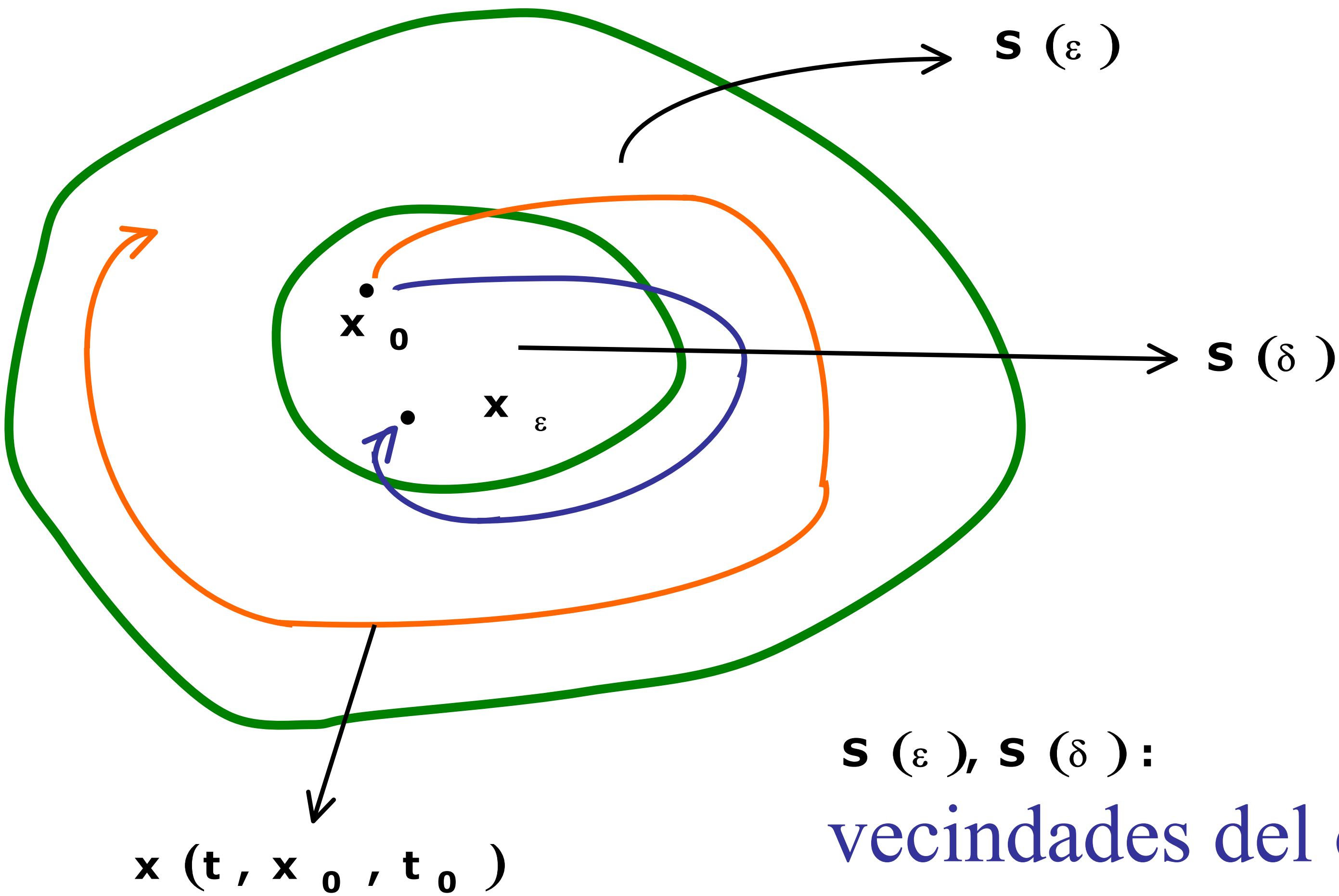
Existe solución en forma única

Un estado de equilibrio x_ε se dice estable en el sentido de Lyapunov, si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$$ tal que

$$\| x_0 - x_\varepsilon \| < \delta \Rightarrow \| x(t, x_0, t_0) - x_\varepsilon \| < \varepsilon \qquad \forall t, t_0$$

Si δ no depende de t_0, x_ε se dice uniformemente estable (UESL)



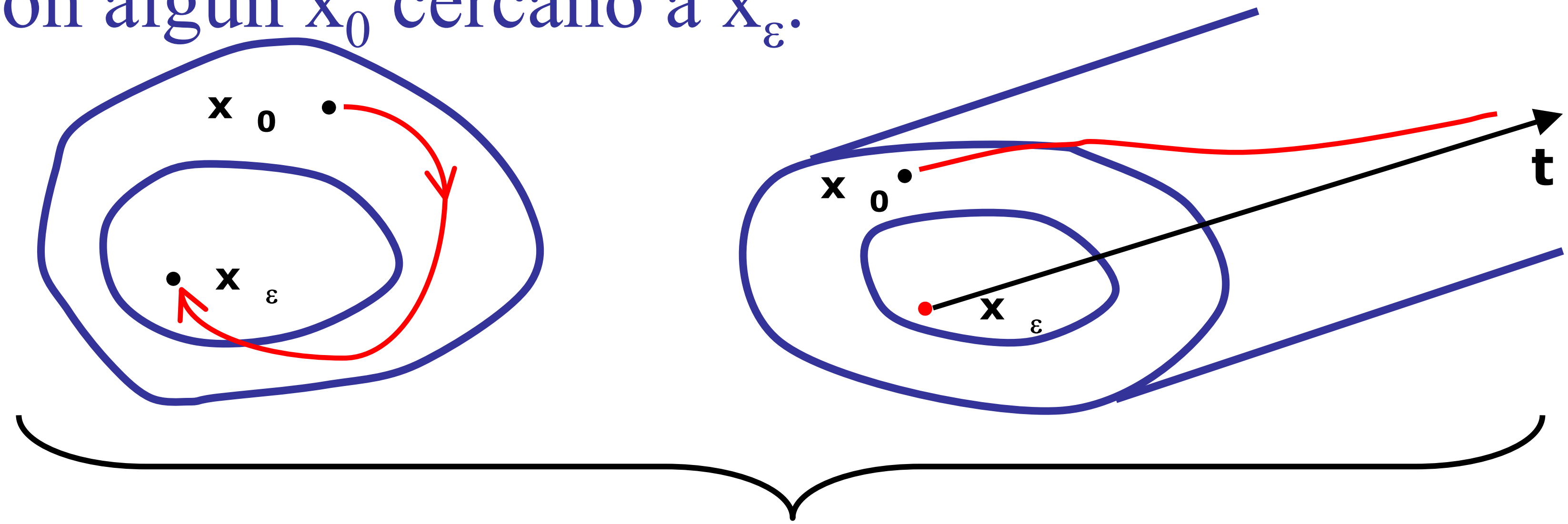
s (ε), **s** (δ) **:**

vecindades del origen de diámetros ε y δ

Un estado de equilibrio x_ε de un sistema se dice *asintóticamente estable según Lyapunov (AESL)*, si y sólo si:

es ESL y $\lim_{t \to \infty} x(t, x_0, t_0) = x_\varepsilon$

con algún x_0 cercano a x_ε.



Estabilidad asintótica según Lyapunov

OBS: En estas definiciones, no se hace referencia a la región de estabilidad, además conceptos locales.

- Un estado x_ε es asintóticamente estable para grandes variaciones, con respecto a una región R, si es ESL y cualquier trayectoria comenzando en R tiende a x_ε si $t \rightarrow \infty$

- Un estado de equilibrio x_ε es *globalmente asintóticamente estable*, si es ESL y cualquier trayectoria tiende a x_ε si $t \rightarrow \infty$

Primer Método de Lyapunov

Sea el sistema descrito por:

$$\dot{x} = f(x,t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Según Lyapunov, la estabilidad de la posición de equilibrio de un sistema no lineal, puede determinarse analizando el sistema lineal que se obtiene desarrollando f(x) en serie de Taylor en torno al estado de equilibrio y despreciando los términos de segundo orden y superiores.

Primer Método de Lyapunov

Es decir, puede escribirse como:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_\varepsilon} \tilde{x}(t)$$

donde

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_\varepsilon$$

Primer Método de Lyapunov

Llamando,

$$J(x_\varepsilon)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene:

$$\dot{\tilde{x}}(t)=J(x_\varepsilon)\tilde{x}(t)$$

Primer Método de Lyapunov

El primer Teorema de Lyapunov dice lo siguiente:

a. Si el sistema linealizado es asintóticamente estable entonces el sistema no lineal es asintóticamente estable.

b. Si el sistema linealizado es inestable entonces el sistema no lineal es inestable.

c. Si el sistema linealizado es estable entonces no se tiene información del sistema no lineal.

Segundo Método de Lyapunov

- Definición: Una función escalar V(x) con $x \in \Re n$, continua y con derivadas de primer orden continuas es *definida positiva (negativa)* en un entorno N(0) del origen y se denota V(x) > 0 (V(x) < 0) si se cumple que:

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0 \quad (V(x) < 0) \quad \forall x \in \mathrm{N}(0), x \neq 0$$

Segundo Método de Lyapunov

- Definición: Una función escalar V(x) con $x \in \Re n$, es *semidefinida positiva (negativa)* en un entorno N(0) del origen y se denota $V(x) \geq 0$ ($V(x) \leq 0$) si se cumple que:

$$V(0) = 0$$

$$V(x) \geq 0 \quad \left(V(x) \leq 0\right) \quad \forall x \in \mathrm{N}(0)$$

Segundo Método de Lyapunov

TEO 1: Si existe una función escalar real V(x) continua y con primeras derivadas parciales continuas, tal que en N(0) se cumple para todo $t \geq t0$:

i. V es definida positiva ($V > 0$)

ii. $\dot{V}$ es semidefinida negativa ($\dot{V} \leq 0$)

entonces la solución $x(t) = 0$ de la ecuación es $\dot{x} = f(x)$ estable según Lyapunov.

Segundo Método de Lyapunov

TEO 2: Si existe una función escalar real V(x) continua y con primeras derivadas parciales continuas, tal que en N(0) se cumple para todo t ≥ t0:

i. V es definida positiva (V > 0)

ii. $\dot{V}$ es semidefinida negativa ($\dot{V}$ < 0)

entonces la solución x(t) = 0 de la ecuación es $\dot{x} = f(x)$ asintóticamente estable según Lyapunov.

Segundo Método de Lyapunov

TEO 3: Si existe una función escalar real V(x) continua y con primeras derivadas parciales continuas, tal que en N(0) se cumple para todo $t \geq t0$:

i. V es definida positiva (V > 0)

ii. $\dot{V}$ es semidefinida negativa ($\dot{V} < 0$)

iii. V ➔ Inf cuando ||x|| ➔ Inf

entonces la solución x(t) = 0 de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ es globalmente asintóticamente estable según Lyapunov.

Segundo Método de Lyapunov

- Si se aplica a el segundo método de Lyapunov a sistemas lineales invariantes se puede determinar la estabilidad mediante la resolución de una ecuación algebraica.

Segundo Método de Lyapunov

TEO 4: Sea el sistema Continuo descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

entonces, x(t) = 0 es AESL si y sólo si dada Q matriz positiva definida, existe P también positiva definida, tal que:

$$A^T P + PA = -Q$$

Segundo Método de Lyapunov

- El TEO 4 se puede demostrar fácilmente eligiendo $V(x) = x^T P x$ con P positiva definida:

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x$$

$$\dot{V}(x) = x^T P A x + (Ax)^T P x$$

$$\dot{V}(x) = x^T P A x + x^T A^T P x$$

$$\dot{V}(x) = x^T (PA + A^T P) x$$

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x$$

$$\Rightarrow -Q = PA + A^T P$$

Segundo Método de Lyapunov

TEO 5: Sea el sistema Discreto descrito por x(t+1) = Ax(t), entonces x = 0 es AESL si y sólo si dada una matriz Q positiva definida, existe P también positiva definida tal que:

$$A^T PA - P = -Q$$

Segundo Método de Lyapunov

- El TEO 5 se puede demostrar fácilmente eligiendo $V(x) = x^T P x$ con P positiva definida:

$$\Delta V(x) = V(x(t+1)) - V(x(t))$$

$$\Delta V(x) = x^T(t+1) P x(t+1) - x^T(t) P x(t)$$

$$\Delta V(x) = x^T(t) A^T P A x(t) - x^T(t) P x(t)$$

$$\Delta V(x) = x^T(t)(A^T P A - P) x(t)$$

$$\Delta V(x) = -x^T(t) Q x(t)$$

$$\Rightarrow -Q = A^T P A - P$$

Segundo Método de Lyapunov

- TEO 6: Sea el sistema descrito por $x(t+1)=f(x(t))$ con $xe=0$. El origen es AESL si y sólo si existe una función $V(x)$ positiva definida tal que:

$$\Delta V(x) = V(x(t+1)) - V(x(t))$$

es negativa definida.