# Pauta Pregunta 3:

Pauta por: Lorenzo Reyes

a) La máquina en estudio posee 2 embobinados en el estator. El enrollado por el cual circula una corriente $i_a(t)$ tiene una inductancia propia $L_{aa}$, mientras que por el que circula una corriente $i_b(t)$ posee una inductancia propia $L_{bb}$. Como ambos enrollados se encuentran en el estator, no existe una inductancia mutua entre ellos. Además como no existen enrollados en el rotor, estás dos bobinas son las únicas a considerar.

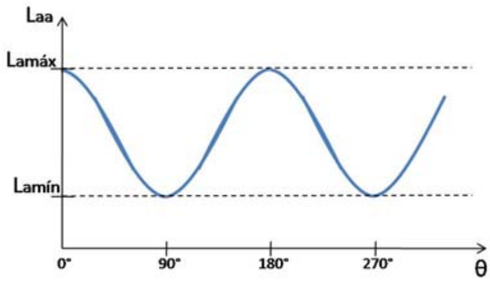
Las expresiones para las inductancias propias de los enrollados en estudio son las siguientes:

$$L_{aa} = \frac{N_e^2}{\Re_a} \qquad L_{bb} = \frac{N_e^2}{\Re_b}$$

Donde $N_e$ es el número de vueltas de ambos enrollados.

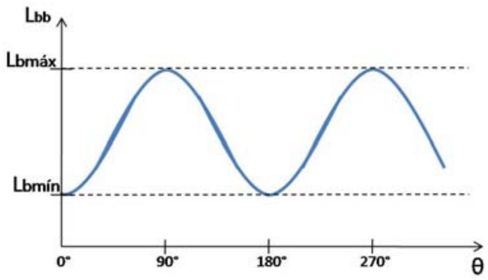
$\boxed{L_{aa}}$

Si $\theta = 0° \Rightarrow \Re_a = \Re_{amín} \Rightarrow L_a = L_{amáx}$
Si $\theta = 90° \Rightarrow \Re_a = \Re_{amáx} \Rightarrow L_a = L_{amín}$
Si $\theta = 180° \Rightarrow \Re_a = \Re_{amín} \Rightarrow L_a = L_{amáx}$
Si $\theta = 270° \Rightarrow \Re_a = \Re_{amáx} \Rightarrow L_a = L_{amín}$




$\boxed{L_{bb}}$

Si $\theta = 0° \Rightarrow \Re_b = \Re_{bmáx} \Rightarrow L_b = L_{bmín}$
Si $\theta = 90° \Rightarrow \Re_b = \Re_{bmín} \Rightarrow L_b = L_{bmáx}$
Si $\theta = 180° \Rightarrow \Re_b = \Re_{bmáx} \Rightarrow L_b = L_{bmín}$
Si $\theta = 270° \Rightarrow \Re_b = \Re_{bmín} \Rightarrow L_b = L_{bmáx}$




Como las dimensiones son iguales en las 4 direcciones de interés, se tiene que:

$$L_{amáx} = L_{bmáx} \quad L_{amín} = L_{bmín}$$

Se definen:

$$L' = \frac{L_{amáx} + L_{amín}}{2} \qquad L = \frac{L_{amáx} - L_{amín}}{2}$$

Así entonces las inductancias propias tienen las siguientes formas:

$$L_{aa} = L' + Lcos(2\theta) \quad L_{bb} = L' - Lcos(2\theta)$$

Además la expresión general para el torque instantáneo es:

$$T(t) = \frac{1}{2}[i]^T \left[\frac{\partial L}{\partial \theta}\right][i]$$

Las derivadas en función del ángulo de las inductancias propias son las siguientes:

$$\frac{\partial L_{aa}}{\partial \theta} = -2Lsin(2\theta)$$

$$\frac{\partial L_{bb}}{\partial \theta} = 2Lsin(2\theta)$$

Por lo que la expresión para el torque medio es:

$$T(t) = \frac{1}{2}\left[-2Lsin(2\theta)i_a^2 + 2Lsin(2\theta)i_b^2\right]$$

$$T(t) = \frac{1}{2}[-2Lsin(2\theta)2I^2sin^2(\omega t) + 2Lsin(2\theta)2I^2sin^2(\omega t - 90°)]$$

$$T(t) = \frac{1}{2}[-2Lsin(2\theta)2I^2sin^2(\omega t) + 2Lsin(2\theta)2I^2cos^2(\omega t)]$$

$$\Rightarrow T(t) = 2LI^2 \sin(2\theta)\,[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]$$

$$\Rightarrow T(t) = 2LI^2 \sin(2\theta)\,cos(2\omega t)$$

b) Para una posición $\theta$ fija y una $\omega$ de la red cualquiera, se tiene que el torque medio es:

$$\overline{T(t)} = 2LI^2 \sin(2\theta)\,\overline{cos(2\omega t)}$$

$$\Rightarrow \overline{T(t)} = 0$$

c) En régimen permanente, se tiene una velocidad constante tal que:

$$\omega_r = \frac{d\theta}{dt} = cte$$

$$\Rightarrow \theta = \omega_r t - \delta$$

Donde $\delta = \theta(t = 0)$.

Así entonces, la expresión para el torque instantáneo es:

$$T(t) = 2LI^2 \sin\big(2(\omega_r t - \delta)\big)\,cos(2\omega t)$$

Desarrollando la expresión:

$$T(t) = LI^2[\sin(2(\omega_r - \omega)t - 2\delta) + \sin(2(\omega_r + \omega)t - 2\delta)]$$

Integrando para calcular el torque medio en un periodo:

$$\theta = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\delta}{\omega_r}$$

$$\theta = 2\pi \Rightarrow t_2 = \frac{\delta + 2\pi}{\omega_r}$$

$$\overline{T(t)} = \frac{\omega_r}{2\pi} \int_{\frac{\delta}{\omega_r}}^{\frac{\delta+2\pi}{\omega_r}} LI^2[\sin(2(\omega_r - \omega)t - 2\delta) + \sin(2(\omega_r + \omega)t - 2\delta)]dt$$

$$\overline{T(t)} = \frac{\omega_r}{2\pi} LI^2 \left[ \int_{\frac{\delta}{\omega_r}}^{\frac{\delta+2\pi}{\omega_r}} \sin(2(\omega_r - \omega)t - 2\delta)\, dt + \int_{\frac{\delta}{\omega_r}}^{\frac{\delta+2\pi}{\omega_r}} \sin(2(\omega_r + \omega)t - 2\delta)\, dt \right]$$

$$\overline{T(t)} = \frac{\omega_r}{2\pi} LI^2 \left[ -\frac{\cos\,(2(\omega_r - \omega)t - 2\delta)}{2(\omega_r - \omega)} - \frac{\cos(2(\omega_r + \omega)t - 2\delta)}{2(\omega_r + \omega)} \right] \Bigg|_{\frac{\delta}{\omega_r}}^{\frac{\delta + 2\pi}{\omega_r}}$$

$$\overline{T(t)} = -\frac{\omega_r}{2\pi} LI^2 \left[ \left\{ \frac{\cos\,(2(\omega_r - \omega)\frac{\delta + 2\pi}{\omega_r} - 2\delta)}{2(\omega_r - \omega)} - \frac{\cos\,(2(\omega_r - \omega)\frac{\delta}{\omega_r} - 2\delta)}{2(\omega_r - \omega)} \right\} + \left\{ \frac{\cos\left(2(\omega_r + \omega)\frac{\delta + 2\pi}{\omega_r} - 2\delta\right)}{2(\omega_r + \omega)} - \frac{\cos\left(2(\omega_r + \omega)\frac{\delta}{\omega_r} - 2\delta\right)}{2(\omega_r + \omega)} \right\} \right]$$

$$\overline{T(t)} = -\frac{\omega_r}{2\pi} LI^2 \left[ \left\{ \frac{\cos\left(4\pi - \frac{2\omega}{\omega_r}(\delta + 2\pi)\right)}{2(\omega_r - \omega)} - \frac{\cos\left(\frac{2\omega}{\omega_r}\delta\right)}{2(\omega_r - \omega)} \right\} + \left\{ \frac{\cos\left(4\pi + \frac{2\omega}{\omega_r}(\delta + 2\pi)\right)}{2(\omega_r + \omega)} - \frac{\cos\left(\frac{2\omega}{\omega_r}\delta\right)}{2(\omega_r + \omega)} \right\} \right]$$

$$\overline{T(t)} = -\frac{\omega_r^2}{4\pi} LI^2 \frac{\cos\left(\frac{2\omega}{\omega_r}(\delta + 2\pi)\right) - \cos\left(\frac{2\omega}{\omega_r}\delta\right)}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

La anterior corresponde a la expresión del torque medio a una velocidad de giro cualquiera.

Para obtener la velocidad constante en régimen permanente, para la máquina en equilibrio, el torque acelerante debe ser nulo, y como no existe torque resistente se tiene que:

$$T_{ac} = T_m - T_r = \bar{T} - T_r = 0$$

$$\Rightarrow \bar{T} = 0$$

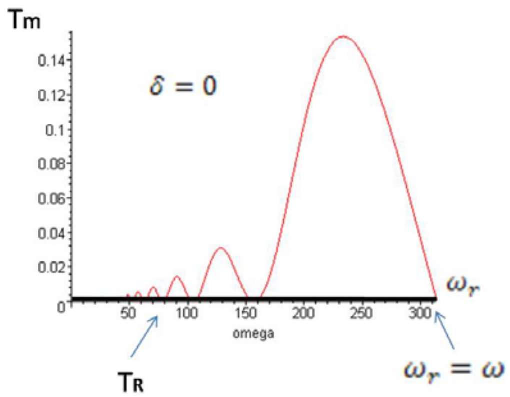
Para que se cumpla dicha condición se necesita que:

$$\frac{\omega_r^2 \cos\left(\frac{2\omega}{\omega_r}(\delta + 2\pi)\right) - \omega_r^2 \cos\left(\frac{2\omega}{\omega_r}\delta\right)}{\omega_r^2 - \omega^2} = 0$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones, ya que son señales senoidales de distinta frecuencia (en función de $\omega_r$).

Una solución particular es $\omega_r = 0$, sin embargo la expresión del torque medio se indefine, por lo que no es solución.

Sin embargo una solución particular de esta ecuación surge cuando $\omega_r \to \omega$ y $\delta = 0$. Con ello se obtiene velocidad constante y torque medio nulo. El siguiente gráfico muestra la situación:




La curva de Torque Medio de la figura anterior es cuando $\delta = 0$, además está graficada en el rango $[0, \omega]$. Pueden verse las infinitas soluciones y que una solución particular es cuando $\omega_r \to \omega$.