



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Eléctrica  
EL42C

## Ejercicio 1

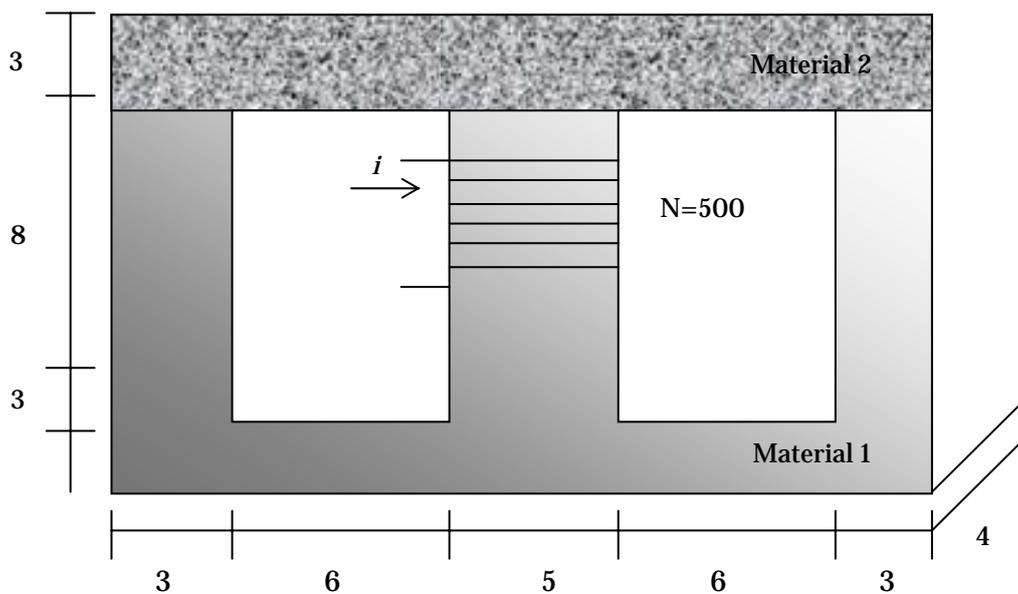
### Circuitos Magnéticos y Cálculo de Inductancia

Profesor: Jorge Romo *joromo@ctcinternet.cl*  
Profesor Auxiliar: Carlos Suazo M. *casuazo@ing.uchile.cl*  
Lunea 13 de Agosto de 2007  
Tiempo: 1 hora 20 minutos

### Pregunta 1:

El relé de la figura tiene un núcleo de acero silicoso de grano orientado (Material 1) cuya característica magnética puede suponerse lineal con permeabilidad  $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-3}$  [mks]. El circuito magnético se cierra por medio de una armadura de hierro undido (Material 2) cuya característica magnética es la siguiente:

$B_2$	[T]	0	0,15	0,40	0,60	0,70	0,85	1,00
$H_2$	[Av/m]	0	50	100	200	300	500	1000



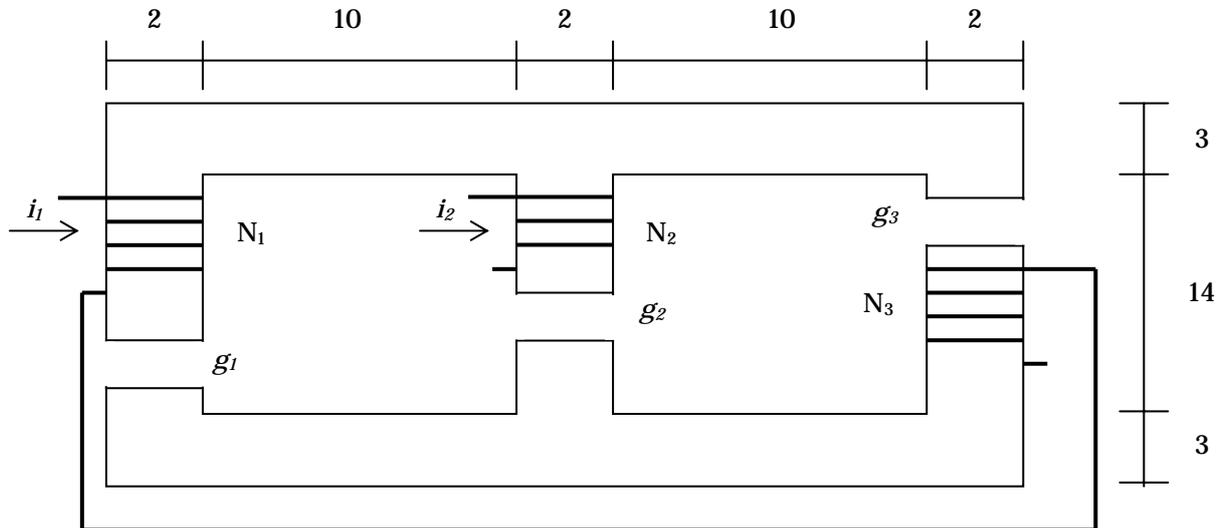
**Figura 1:** Circuito a analizar (todas las medidas en cm)

Para la configuración anterior se pide determinar:

- La corriente continua necesaria para establecer un flujo de 0.96 [mWb] en las ramas laterales, con la armadura cerrada.
- La permeabilidad relativa y la reluctancia de cada material para el punto de operación anterior.
- El flujo resultante si la magnitud de la corriente es de 0,25 [A]
- La reluctancia total del circuito en esta nueva condición.

## Pregunta 2:

Considere el siguiente circuito magnético:



**Figura 2:** Esquema problema 2 (todo en cm)

Considere que el material ferromagnético se encuentra trabajando en la zona lineal y que tiene una profundidad de 5 cm. La permeabilidad del núcleo es  $\mu_{Fe}$ .

- Resuelva el circuito de reluctancias asociado encontrando las expresiones para los flujos magnéticos en el núcleo en función de los parámetros de la figura.
- Calcule las inductancias propias y mutuas del circuito.

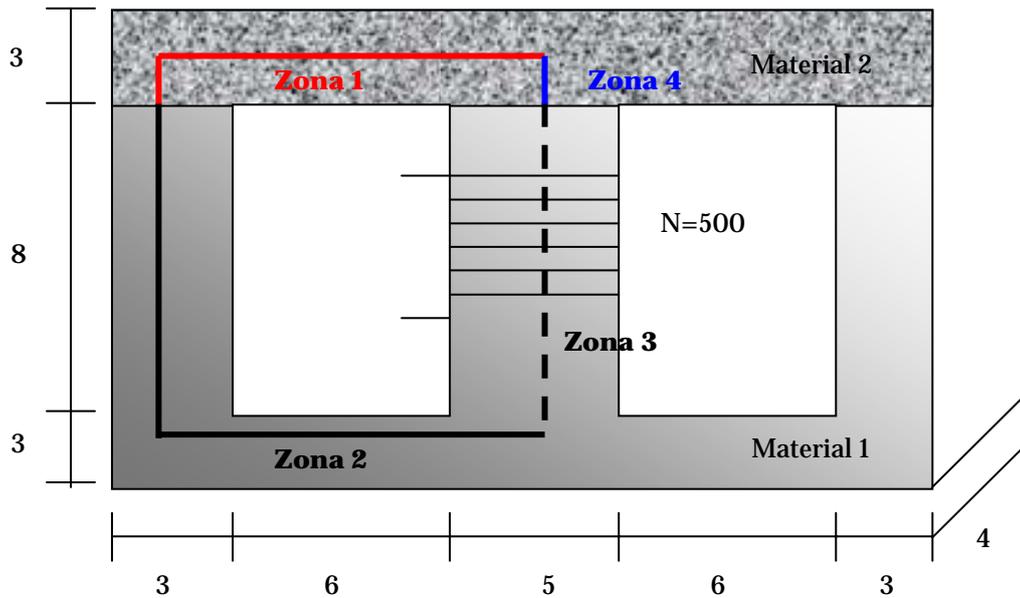
**Hint:** Ocupe todas las aproximaciones señaladas en clases y la convención de signos discutida en clase auxiliar. Mucha atención con las unidades que se utilizan. Mucha Suerte!

## Pautas de Corrección

### Pregunta 1:

Pauta por Carlos Suazo M.

Considérese la siguiente distribución de zonas:



La primera ecuación a plantear es:

$$\phi_3 = 2\phi_1$$

Y por enunciado se tiene que:

$$\phi_1 = 0,96[mWb]$$

Así la ecuación por zonas es:

- **Zona 1:**

$$B_1 = \frac{\phi_1}{A_1} = \frac{0,96[mWb]_1}{3 \cdot 4 \cdot 10^{-4}[m^2]} = 0,8[T]$$

De esta forma se identifica que  $B_1 \in [0,7 ; 0,85]$  y  $H_1 \in [300 ; 500]$  (se obtiene de la curva B-H del enunciado). Interpolando se obtiene la siguiente curva:

$$B_1(H_1) = 7,5 \cdot 10^{-4} H_1 + 0,475$$

Así:

$$H_1 = 433,3 \left[ \frac{A}{m} \right], l_1 = 0,115[m]$$

- **Zona 2:**

$$B_2 = \frac{\phi_2}{A_2} = \frac{0,96[mWb]_1}{3 \cdot 4 \cdot 10^{-4}[m^2]} = 0,8[T]$$

Así:

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_1} = \frac{0,8[T]}{4 \cdot 10^{-3}} = 200 \left[ \frac{A}{m} \right], \quad l_2 = 0,195[m]$$

- **Zona 3:**

$$B_3 = \frac{\phi_3}{A_3} = \frac{2 \cdot 0,96[mWb]}{5 \cdot 4 \cdot 10^{-4}[m^2]} = 0,96[T]$$

Así:

$$H_3 = \frac{B_3}{\mu_1} = \frac{0,96[T]}{4 \cdot 10^{-3}} = 240 \left[ \frac{A}{m} \right], \quad l_3 = 0,095[m]$$

- **Zona 4:**

$$B_4 = \frac{\phi_4}{A_4} = \frac{2 \cdot 0,96[mWb]}{5 \cdot 4 \cdot 10^{-4}[m^2]} = 0,96[T]$$

De esta forma se identifica que  $B_4 \in [0,85;1,00]$  y  $H_4 \in [500;1000]$  (se obtiene de la curva B-H del enunciado). Interpolando se obtiene la siguiente curva:

$$B_4(H_4) = 3 \cdot 10^{-4} H_4 + 0,7$$

Así:

$$H_4 = 866,667 \left[ \frac{A}{m} \right], \quad l_4 = 0,015[m]$$

Finalmente planteando la ecuación:

$$Ni = \sum_{j=1}^4 H_j l_j = 124,633$$

$$i = 0,249[A]$$

Sigue el cálculo de la permeabilidad relativa y la reluctancia de cada material para el punto de operación anterior:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \mathfrak{R} = \frac{l}{\mu \cdot A}, \quad \mu = \frac{B}{H}$$

Así se obtiene que:

$$\mu_{r1} = \frac{0,8/433,333}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1469,123, \quad \mathfrak{R}_1 = \frac{0,115}{\left( \frac{0,8}{433,333} \right) 0,0012} = 51.909,682 \left[ \frac{Av}{Wb} \right]$$

$$\mu_{r2} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 3183,099, \quad \mathfrak{R}_2 = \frac{0,195}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0012} = 40.625 \left[ \frac{Av}{Wb} \right]$$

$$\mu_{r3} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 3183,099, \quad \mathfrak{R}_3 = \frac{0,095}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0020} = 11.875 \left[ \frac{Av}{Wb} \right]$$

$$\mu_{r4} = \frac{0,96/866,667}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 881,473, \quad \mathfrak{R}_4 = \frac{0,015}{\left( \frac{0,96}{866,667} \right) \cdot 0,0012} = 6.770,836 \left[ \frac{Av}{Wb} \right]$$

Para la segunda condición de operación se busca el flujo si la corriente es de 0,25 [A], pero del caso anterior se tenía que la corriente era aproximadamente 0,25 [A], con un flujo de 0,96 [mWb]. Se concluye que el flujo por la pieza central es de 1,82 [mWb].

Para finalizar el cálculo de la reluctancia en esta nueva condición está dada por:

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \frac{\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4}{2} = 64.913,177 \left[ \frac{Av}{Wb} \right]$$

## Pregunta 2:

Pauta por Lorenzo Reyes

a) El circuito de reluctancias asociado al problema es el siguiente:

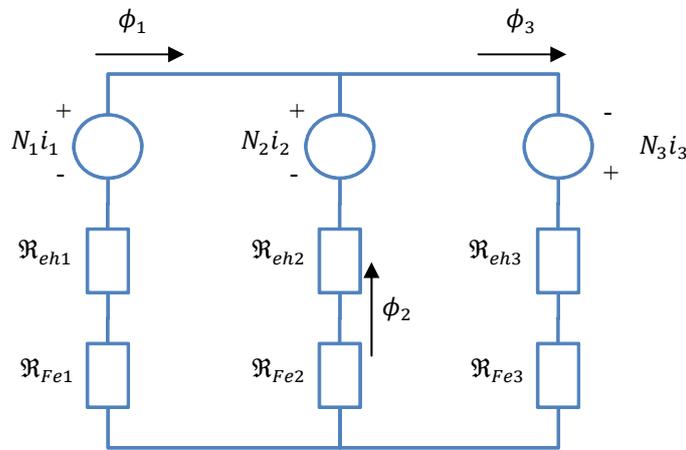


Figura 1: Circuito de reluctancias

Donde cada reluctancia tiene el siguiente valor:

$$\mathfrak{R}_{eh1} = \frac{g_1}{\mu_0 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \quad \mathfrak{R}_{eh2} = \frac{g_2}{\mu_0 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \quad \mathfrak{R}_{eh3} = \frac{g_3}{\mu_0 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}$$

$$\mathfrak{R}_{Fe1} = \frac{24 \cdot 10^{-2}}{\mu_{Fe} \cdot 15 \cdot 10^{-4}} + \frac{(17-g_1) \cdot 10^{-2}}{\mu_{Fe} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \quad \mathfrak{R}_{Fe2} = \frac{(17-g_2) \cdot 10^{-2}}{\mu_{Fe} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \quad \mathfrak{R}_{Fe3} = \frac{24 \cdot 10^{-2}}{\mu_{Fe} \cdot 15 \cdot 10^{-4}} + \frac{(17-g_3) \cdot 10^{-2}}{\mu_{Fe} \cdot 10 \cdot 10^{-4}}$$

Las ecuaciones que dominan el comportamiento de este circuito son las siguientes:

$$N_1 i_1 + (\mathfrak{R}_{eh1} + \mathfrak{R}_{Fe1}) \phi_1 = N_2 i_2 + (\mathfrak{R}_{eh2} + \mathfrak{R}_{Fe2}) \phi_2 \quad (1)$$

$$N_1 i_1 + (\mathfrak{R}_{eh1} + \mathfrak{R}_{Fe1}) \phi_1 + N_3 i_1 + (\mathfrak{R}_{eh3} + \mathfrak{R}_{Fe3}) \phi_3 = 0 \quad (2)$$

$$\phi_1 + \phi_2 = \phi_3 \quad (3)$$

Nombrando:

$$\mathfrak{R}_{eh1} + \mathfrak{R}_{Fe1} = \mathfrak{R}_1$$

$$\mathfrak{R}_{eh2} + \mathfrak{R}_{Fe2} = \mathfrak{R}_2$$

$$\mathfrak{R}_{eh3} + \mathfrak{R}_{Fe3} = \mathfrak{R}_3$$

Se tiene que:

$$\phi_3 = \frac{N_2 i_2 + \mathfrak{R}_2 \phi_2 - N_1 i_1}{\mathfrak{R}_1} + \phi_2 \quad (4)$$

$$\phi_3 = \frac{\mathfrak{R}_1 \phi_2 - (N_3 + N_1) i_1}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_3} \quad (5)$$

Luego:

$$\phi_2 = \left[ \frac{N_2 i_2 - N_1 i_1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{(N_3 + N_1) i_1}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_3} \right] \left( \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_3} - \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1} - 1 \right)^{-1} \quad (6)$$

Luego usando la ecuación 5 y la ecuación 3 se pueden obtener las expresiones para  $\phi_1$  y  $\phi_3$  directamente.

b) Si sólo pasa corriente por la bobina de  $N_1$  vueltas:

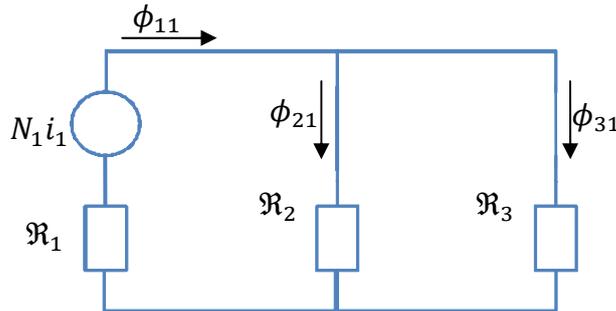


Figura 2: Cálculo de inductancias 1.

Y por lo tanto las inductancias propias y mutuas dado el flujo producido por la bobina 1 son:

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 // \mathfrak{R}_3}$$

$$L_{12} = \frac{N_1 N_2 \mathfrak{R}_3}{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 // \mathfrak{R}_3)(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}$$

$$L_{13} = \frac{N_1 N_2 \mathfrak{R}_2}{(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 // \mathfrak{R}_3)(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}$$

Análogamente para los demás casos se tiene:

$$L_{21} = \frac{N_2 N_1 \mathfrak{R}_3}{(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1 // \mathfrak{R}_3)(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_3)}$$

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1 // \mathfrak{R}_3}$$

$$L_{23} = \frac{N_2 N_3 \mathfrak{R}_1}{(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1 // \mathfrak{R}_3)(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_3)}$$

$$L_{31} = \frac{N_3 N_1 \mathfrak{R}_2}{(\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_1 // \mathfrak{R}_2)(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)}$$

$$L_{32} = \frac{N_3 N_2 \mathfrak{R}_1}{(\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_1 // \mathfrak{R}_2)(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)}$$

$$L_{33} = \frac{N_3^2}{\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_1 // \mathfrak{R}_2}$$