Análisis de Señales

Capítulo I: Señales periódicas y serie de Fourier

Profesor: Néstor Becerra Yoma

1.1 Clasificación de las señales

- Potencia disipada por señal eléctrica:
  - Para voltaje:
$$p = \frac{|e(t)|^2}{R} \quad (1)$$
  - Para corriente:
$$p = R|i(t)|^2 \quad (2)$$

- Potencia de una señal:

$$p = |f(t)|^2 \quad (3)$$

1.1 Clasificación de las señales

- Energía disipada en un intervalo

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \left| f(t) \right|^2 dt \qquad (4)$$

- Potencia media disipada en un intervalo

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left| f(t) \right|^2 dt \qquad (5)$$

1.1 Clasificación de las señales

- Señales de energía o de potencia
  - De energía:

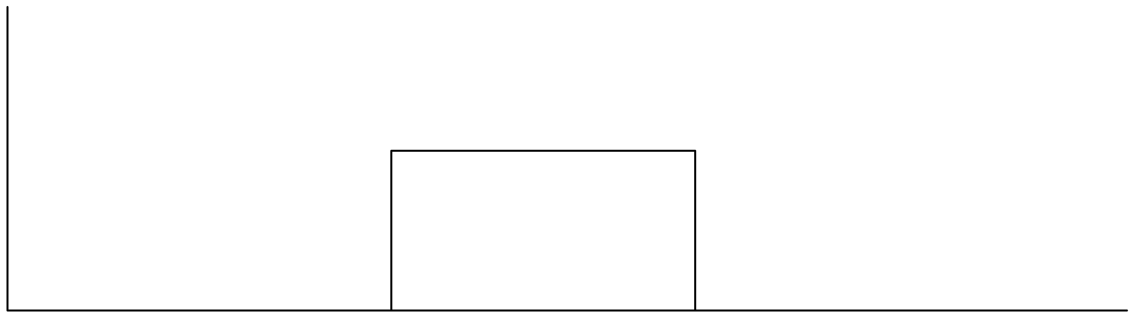
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty \qquad (6)$$

  - De potencia

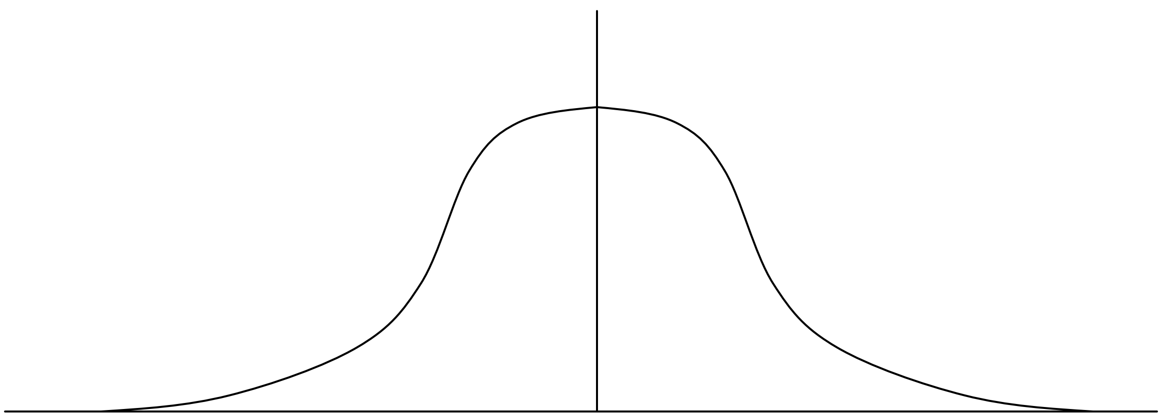
$$0 < \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt < \infty \qquad (7)$$

1.1 Clasificación de las señales

- Ejemplo: señales de energía



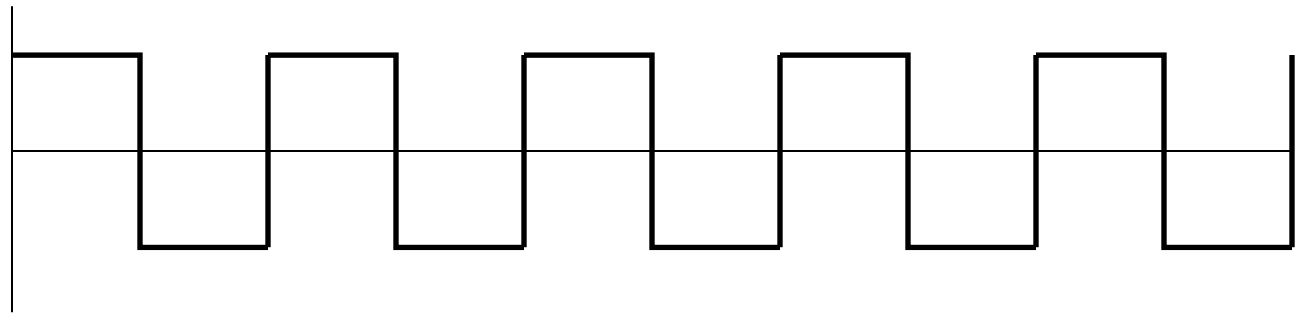
Pulso rectangular (duración temporal finita)



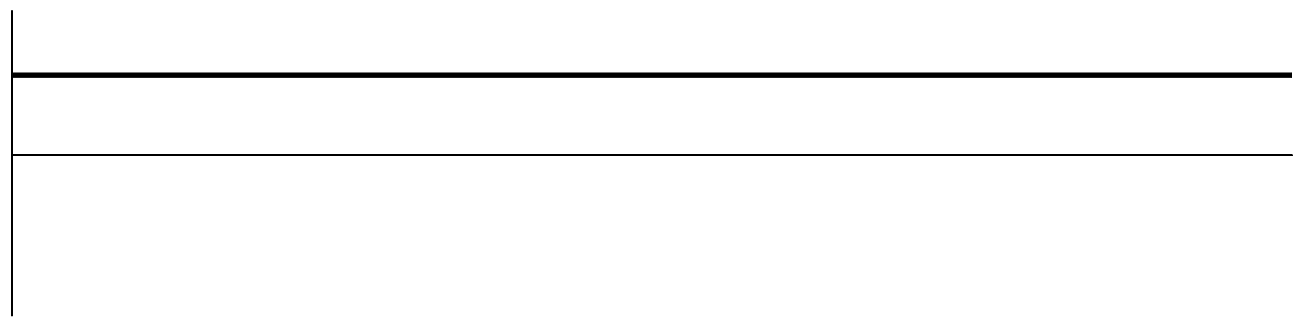
Gaussiana (duración temporal no finita, debe atenuarse)

1.1 Clasificación de las señales

- Ejemplo: señales de potencia



Onda cuadrada



Constante

1.1 Clasificación de las señales

- Señales periódicas o no periódicas
  - Periódicas: $f(t+T) = f(t)$ para todo t
  - Aperiódicas: ningún T satisface lo anterior
  - Casi periódica: Suma de señales periódicas de períodos inconmensurables

    Ej: $$f(t) = sen(t) + sen(\sqrt{2}t)$$

1.1 Clasificación de las señales

- Aleatoria:
  - Perteneciente a un conjunto de señales
  - Incerteza en cual saldrá elegida
  - Incerteza en los valores futuros
- Determinista
  - Perfectamente determinada
  - En general tienen forma analítica

1.2 Clasificación de los sistemas

- Sistema: regla (mapeo) que relaciona dos funciones o señales: entrada y salida

$$y(t)=\Re\left\{f(t)\right\} \qquad (8)$$

- Se pueden componer

$$y(t)=\Re_2\left\{\Re_1\left\{f(t)\right\}\right\}=\Re\left\{f(t)\right\} \qquad (9)$$

1.2 Clasificación de los sistemas

- Lineal: $\Re\{\ \}$ es lineal si cumple:

$$y_1(t) = \Re\{f_1(t)\},\ \ y_2(t) = \Re\{f_2(t)\}$$
$$\Rightarrow \Re\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \tag{10}$$

- No lineal: No cumple esa propiedad

1.2 Clasificación de los sistemas

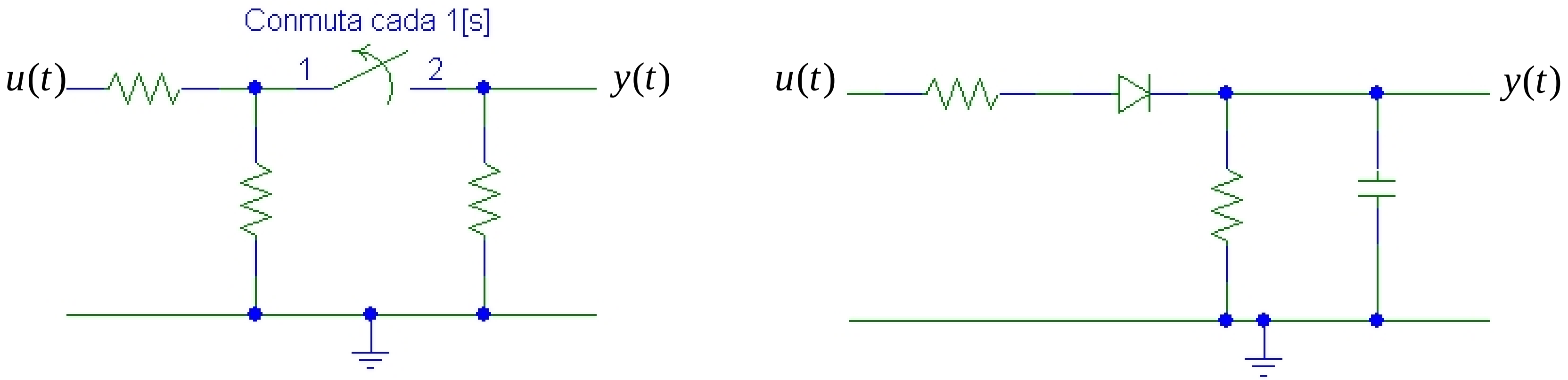
- Invariable en el tiempo si

$$y(t-t_0)=\Re\left\{f(t-t_0)\right\} \qquad (11)$$

- Variable en el tiempo: una entrada retrasada no produce la misma salida retrasada

1.2 Clasificación de los sistemas

- Ejemplo



  - a) Sistema lineal variable en el tiempo
  - b) Sistema no lineal invariable

1.2 Clasificación de los sistemas

- Realizable o causal:

$$y(t_0) \text{ depende sólo de } f(t) \text{ para } t < t_0$$

  – Responde después de aplicar la entrada

- No realizable o no causal:
  – La salida actual depende de entradas futuras

1.3 Señales y vectores

Vectores: Repaso

- Producto punto entre vectores reales

$$\vec{\phi}_1 \bullet \vec{\phi}_2 = \sum_{i=1}^{N} \phi_{1(i)} \phi_{2(i)} = C_{12} \qquad (12)$$

- Espacio ortogonal (vectores base)

$$\{\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3\}$$

$$\vec{\phi}_n \bullet \vec{\phi}_m = \begin{cases} k_n & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \qquad (13)$$

1.3 Señales y vectores

- Cualquier vector $\vec{A}$ se puede representar como una combinación lineal de los vectores base

$$\vec{A} = a_1\vec{\phi}_1 + a_2\vec{\phi}_2 + a_3\vec{\phi}_3 \qquad (14)$$

$$a_n = \frac{\vec{A}_1 \bullet \vec{\phi}_n}{\vec{\phi}_n \bullet \vec{\phi}_n} = \vec{A} \bullet \frac{\vec{\phi}_n}{\vec{\phi}_n \bullet \vec{\phi}_n} = \vec{A} \bullet \left(\frac{\vec{\phi}_n}{k_n} \right) \qquad (15)$$

  – Los coeficientes se obtienen mediante una proyección en los vectores de la base

1.4 Funciones ortogonales

Funciones:

- Se tiene un conjunto de funciones base

$$\{\phi_1(t), \phi_2(t), ...\}, \ t \in [t_1, t_2]$$

- Se desea encontrar una forma de expresar cualquier función *f(t)* como una combinación lineal de los $\phi_i(t)$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} f_i \phi_i(t), \ t \in [t_1, t_2]$$

- Se deben calcular los coeficientes f_i

1.4 Funciones ortogonales

- Def: Dos funciones son ortogonales si:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_1(t)\phi_2^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi_1^*(t)\phi_2(t)dt = 0 \qquad (18)$$

- Espacio ortogonal (funciones base)

$$\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m^*(t)dt = \begin{cases} k_n & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \qquad (19)$$

1.4 Funciones ortogonales

- Un conjunto de funciones base $\{\phi_1(t), \phi_2(t), ...\}$

está normalizado si

$$K_n = \int_{t_1}^{t_2} \left|\phi_n(t)\right|^2 dt = 1 \text{ para todo n} \qquad (20)$$

❖ Conjunto ortogonal y normalizado = ortonormal

❖ Integral del producto de dos funciones en un intervalo fijo = producto interno

1.4 Funciones ortogonales

- Aproximación al tomar N términos

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^{N} f_n \phi_n(t)$$

- Error cuadrático residual

$$\int_{t_1}^{t_n} \left|\varepsilon_N(t)\right|^2 dt = \int_{t_1}^{t_n} \left| f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n \phi_n(t) \right|^2 dt \qquad (21)$$

1.4 Funciones ortogonales

- Usando (19):

$$\int_{t=t_1}^{t_2} |\varepsilon_N(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt - \\ - \sum_{n=1}^{N} \left[f_n^{\;*} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^{\;*}(t)dt + f_n \int_{t_1}^{t_2} f^{\,*}(t)\phi_n(t)dt - |f_n|^2 K_n \right] \tag{22}$$

- Completando la sumatoria:

$$\int_{t=t_1}^{t_2} |\varepsilon_N(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt - \\ - \sum_{n=1}^{N} \left[\left| K_n^{\;1/2} f_n - \frac{1}{K_n^{\;1/2}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^{\;*}(t)dt \right|^2 - \left| \frac{1}{K_n^{\;1/2}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^{\;*}(t)dt \right|^2 \right] \tag{23}$$

1.4 Funciones ortogonales

$$\int_{t=t_1}^{t_2} \left|\varepsilon_N(t)\right|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left| f(t)\right|^2 dt - $$

$$-\sum_{n=1}^{N}\left[\left|K_n^{1/2} f_n - \frac{1}{K_n^{1/2}}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)dt\right|^2 - \left|\frac{1}{K_n^{1/2}}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)dt\right|^2\right] \quad (24)$$

- Se debe elegir los f_n de modo de minimizar el error cuadrático, sólo el segundo término depende de f_n

$$f_n = \frac{1}{K_n}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)dt = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \left|\phi_n(t)\right|^2 dt} \quad (25)$$

1.4 Funciones ortogonales

- De las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon_N(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^{N} |f_n|^2 K_n$$

$$\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon_N(t)|^2 dt + \sum_{n=1}^{N} |f_n|^2 K_n$$

- La energía de la función se reparte en la energía de la aproximación más la del error.

1.4 Funciones ortogonales

- Se dice que un conjunto de funciones base es completo si, al considerar más términos en la aproximación, el error tiende a cero, es decir, si se cumple esto:

$$\varepsilon_N(t) = f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n \phi_n(t)$$

$$\forall f(\cdot), \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon_N(t)|^2 dt = 0$$

1.4 Funciones ortogonales

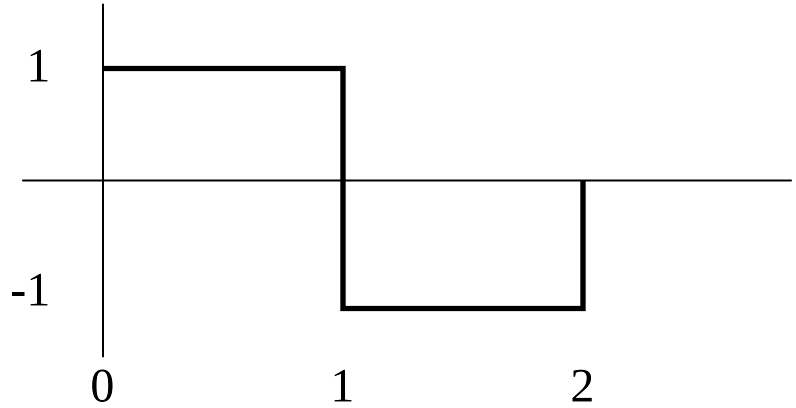
- Para un conjunto de funciones base se cumple lo siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 K_n$$

- Esta relación se conoce como teorema de Parseval.
- Una representación de una función mediante un conjunto de funciones base se llama "serie de Fourier generalizada"

1.4 Funciones ortogonales

- Ejemplo: Representar la siguiente función como combinación lineal de funciones seno:



$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$\phi(t) = \{sen(\pi t), sen(3\pi t), \ldots\} = \{sen(n\pi t)\}_{n \in N}$$

1.4 Funciones ortogonales

- Las funciones *sen(nπt)* son ortonormales en [0,2].

$$\int_0^2 sen(n\pi t)sen(m\pi t)dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

- Luego, la función se puede expresar como:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen(n\pi t) \qquad f_n = \frac{\int_0^2 f(t)sen(n\pi t)dt}{\int_0^2 sen^2(n\pi t)dt}$$

1.4 Funciones ortogonales

- En particular, para el f(t) indicado:

$$f_n = \frac{\int_0^1 sen(n\pi t)dt - \int_1^2 sen(n\pi t)dt}{1} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

- Luego, f(t) queda expresado por la serie:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} sen(\pi t) + \frac{4}{3\pi} sen(3\pi t) + \frac{4}{5\pi} sen(5\pi t) + \ldots$$

1.4 Funciones ortogonales

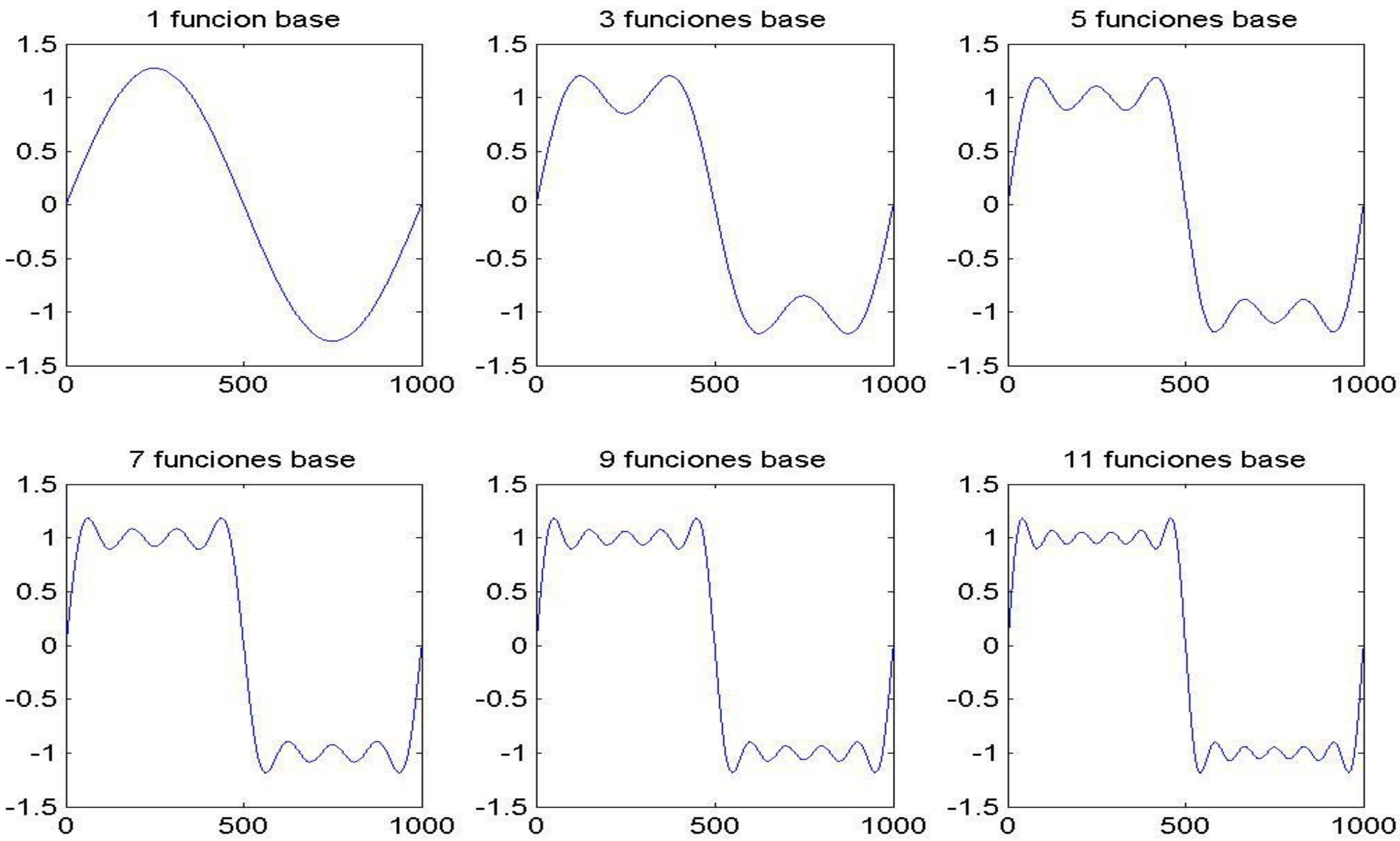
- Al hacer una aproximación usando sólo N funciones base, se comete un error:

$$\int_0^2 \left|\varepsilon_N(t)\right|^2 dt = 2 - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{N} \left(\frac{4}{\pi n}\right)^2$$

N	Energía del error	% de energía
1	0.379	18.94%
3	0.199	9.94%
5	0.134	6.69%
7	0.101	5.04%
9	0.081	4.04%

1.4 Funciones ortogonales

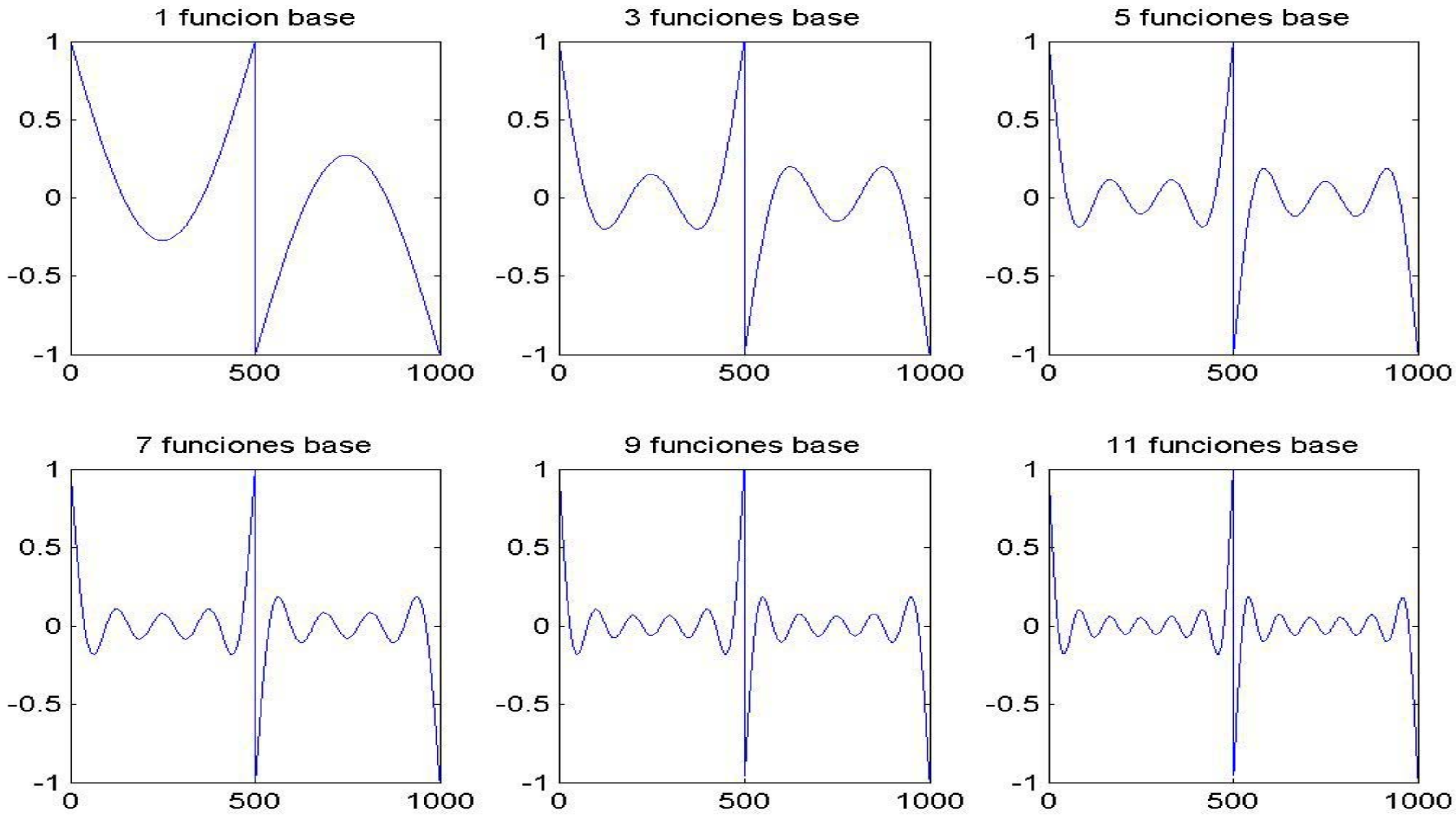
- Aproximaciones de la función:



Err_fourier.txt

1.4 Funciones ortogonales

- Errores de aproximación:



1.5 Serie exponencial de Fourier

- Se considerará la siguiente base:

$$\phi_n = e^{jn\omega_0 t},\ \ n \in \mathbb{Z}$$

- El valor de n se llama número armónico
- Se calculará el producto interno entre 2 funciones sobre $[t_1,t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \frac{1}{j(n-m)\omega_0}\left(e^{j(n-m)\omega_0 t_2} - e^{j(n-m)\omega_0 t_1}\right)$$

$$= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1}\left(e^{j(n-m)\omega_0 (t_2-t_1)} - 1\right)$$

1.5 Serie exponencial de Fourier

- Si se elige: $\omega_0(t_2 - t_1) = 2\pi$
- Se logra que:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} (t_2 - t_1) & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

- Se puede demostrar que la base es completa, por lo que cualquier función f(t) de energía finita en $[t_1,t_2]$ se puede representar como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2], \ \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \qquad F_n \in \mathbb{C}$$

1.5 Serie exponencial de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2], \ \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

- Para calcular los F_n

$$f(t)e^{-jm\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = F_m (t_2 - t_1)$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

1.5 Serie exponencial de Fourier

- Ejemplo: Escribir la siguiente función como serie exponencial de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

- Solución:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

1.5 Serie exponencial de Fourier

$$F_n = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-jn\pi t}dt - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{-jn\pi t}dt$$

$$= \frac{1}{2jn\pi}\left[-e^{-jn\pi} + 1 + e^{-j2n\pi} - e^{-jn\pi}\right] = \frac{1}{jn\pi}\left[1 - e^{-jn\pi}\right]$$

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{2}{jn\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\pi t}$$

$$f(t) = \frac{2}{j\pi}e^{j\pi t} + \frac{2}{j3\pi}e^{j3\pi t} + \frac{2}{j5\pi}e^{j5\pi t} + \ldots - \frac{2}{j\pi}e^{-j\pi t} - \frac{2}{j3\pi}e^{-j3\pi t} - \frac{2}{j5\pi}e^{-j5\pi t} - \ldots$$

1.5 Serie exponencial de Fourier

- Dada f(t), la serie existe si se satisfacen las condiciones de Dirichlet:
  - f(t) tiene un nº finito de máximos y mínimos en $[t_1,t_2]$
  - f(t) tiene un nº finito de discontinuidades en $[t_1,t_2]$
  - f(t) es absolutamente integrable en $[t_1,t_2]$

$$f(t) = \int_{t=t_1}^{t_2} |f(t)| dt < \infty$$

- Las condiciones anteriores siempre se cumplen para señales de energía finita en $[t_1,t_2]$

1.6 Señales y representaciones complejas

- Considérese una función f(·) compleja:

$$f = f_{RE} + j\ f_{IM}$$

- Su conjugada es:

$$f^* = f_{RE} - j\ f_{IM}$$

- Su parte real e imaginaria son:

$$f_{RE} = \frac{f + f^*}{2},\quad f_{IM} = \frac{f - f^*}{2j}$$

1.6 Señales y representaciones complejas

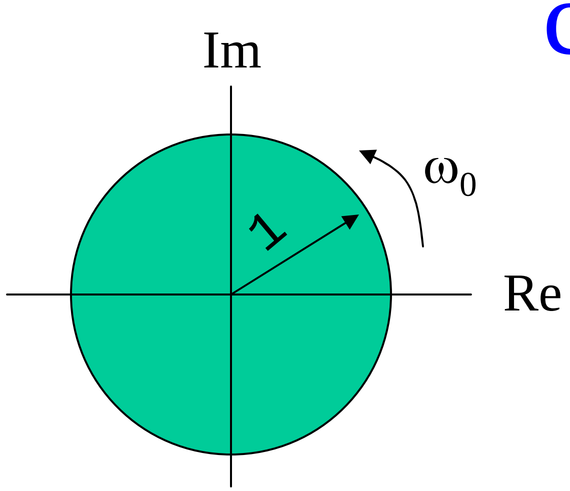
- Su magnitud se puede calcular a partir de:

$$|f|^2 = f\ f^* = (f_{RE} + j\ f_{IM})(f_{RE} - j\ f_{IM}) = |f_{RE}|^2 + |f_{IM}|^2$$

- La exponencial compleja es suma de un seno y un coseno, y describe un círculo de radio 1 en el plano complejo:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\ sen(\omega_0 t)$$

1.6 Señales y representaciones complejas



$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\,sen(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$y(t) = sen(\omega_0 t)$$

- Las exponenciales complejas se pueden describir en término de seno y coseno, y viceversa.

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \;\; sen(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

1.6 Señales y representaciones complejas

- Recordando la propiedad:

$$x_{RE}=\frac{x+x^*}{2},\ x_{IM}=\frac{x-x^*}{2j},\ \forall x\in\mathbb{C}$$

se puede concluir la siguiente propiedad para los coeficientes de la serie:

$$F_n=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt,\qquad F_{-n}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

$$F_n^*=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f^*(t)e^{jn\omega_0 t}dt=F_{-n}\ \text{para}\ f(\cdot)\ \text{real}$$

$$\text{Además, }\operatorname{Re}(F_n)=\frac{F_n+F_n^*}{2}=\frac{F_n+F_{-n}}{2}$$

1.7 Serie de Fourier trigonométrica

- La serie de Fourier exponencial se puede reescribir en término de senos y cosenos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{-1} F_m e^{jm\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{m=-1}^{-\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (n' = -m)$$

$$f(t) = \sum_{n'=1}^{\infty} F_{-n'} e^{-jn'\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}. \quad \text{Si } f(\cdot) \text{ es real}:$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_n e^{jn\omega_0 t} + 2F_{-n} e^{-jn\omega_0 t}}{2} = \boxed{F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t})}$$

1.7 Serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}(2F_n e^{jn\omega_0 t})$$

$$\mathrm{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) = \mathrm{Re}\Big((F_{n_{RE}} + j\,F_{n_{IM}})(\cos(\omega_0 t) + j\,sen(\omega_0 t))\Big)$$

$$\mathrm{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) = F_{n_{RE}} \cos(\omega_0 t) - F_{n_{IM}}\,sen(\omega_0 t)$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2F_{n_{RE}} \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-2F_{n_{IM}})sen(\omega_0 t)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(\omega_0 t)$$

1.7 Serie de Fourier trigonométrica

- Las funciones $cos(n\omega_0 t)$ y $sen(n\omega_0 t)$ para n=0,1,... forman una base ortogonal en [t1,t2] si $(t_2-t_1)\omega=2\pi$
- Para poder calcular directamente los valores de a_n y b_n se puede multiplicar la ecuación anterior por $cos(m\omega_0 t)$ o por $sen(n\omega_0 t)$ y luego integrar en [t1,t2]

1.7 Serie de Fourier trigonométrica

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \cos^2(n\omega_0 t)dt} = \frac{2}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} sen^2(n\omega_0 t)dt} = \frac{2}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt$$

$$a_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

- a_0 es el valor medio de la señal.

1.7 Serie de Fourier trigonométrica

- La serie trigonométrica de Fourier se puede escribir usando sólo cosenos:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) =$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}(|F_n| e^{j\phi_n} e^{jn\omega_0 t})$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

1.7 Serie de Fourier trigonométrica

- Se cumplen las siguientes relaciones:

$$f(t) = \underbrace{F_0}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2F_{n_{RE}}}_{a_n} \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-2F_{n_{IM}})}_{b_n} sen(\omega_0 t)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{2\left|F_n\right|}_{c_n} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}},\ \ \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

1.7 Serie de Fourier trigonométrica

- Ejemplo: representar f(t) como serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) = t^2,\ t \in [0,2]$$

- Desarrollo:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 dt = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 t^2 cos(n\pi t)dt = \frac{4}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 t^2 sen(n\pi t)dt = \frac{-4}{n\pi}$$

1.7 Serie de Fourier trigonométrica

- Luego, la serie trigonométrica es:

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\pi t) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sen(n\pi t)$$

- Cualquier función se puede expresar como la suma de una parte par más una parte impar:

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

1.7 Serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

$$f_p(t) = f_p(-t), \quad f_i(t) = -f_i(-t)$$

- Los términos coseno de la serie (incluyendo a_0) permiten representar la parte par, mientras que los términos seno representan la impar.

1.7 Extensión por periodicidad

- Una función definida en el intervalo $[t_1,t_2]$ se puede representar mediante su serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Las exponenciales complejas son funciones periódicas:

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j\,sen(n\omega_0 t)$$

1.8 Extensión por periodicidad

- Luego, si se analiza una serie de Fourier fuera del rango [t_1,t_2] se puede concluir que es periódica, de periodo $T=t_2-t_1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 (t+T)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left(e^{jn\omega_0 t} e^{jn\omega_0 T} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

- porque:

$$e^{jn\pi T} = e^{jn\frac{2\pi}{t_2 - t_1}T} = e^{jn2\pi} = \cos(2\pi n) + jsen(2\pi n) = 1$$

1.8 Extensión por periodicidad

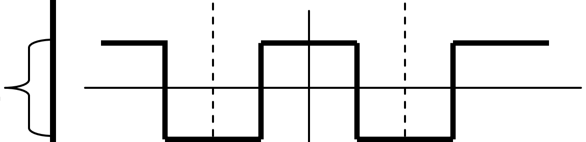
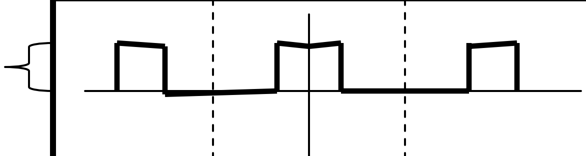
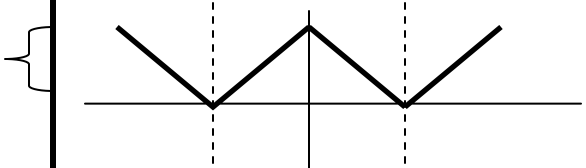
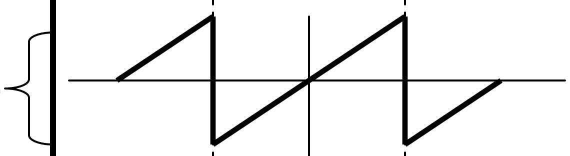
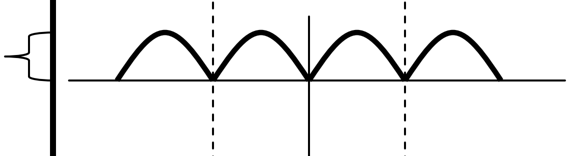
- Si f(t)=f(t+T), entonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

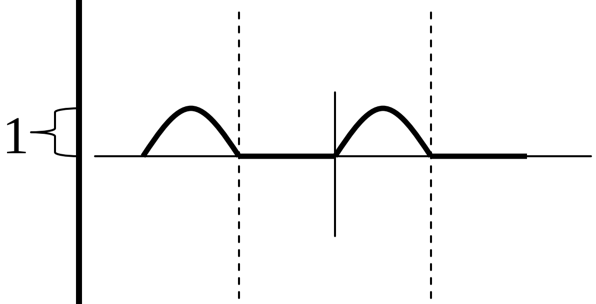
- Es decir, la serie de Fourier para una señal periódica vale en todo el eje real.
- Los F_n se calculan considerando sólo 1 periodo de la señal

1.8 Extensión por periodicidad

T

2 	Par	$\begin{cases} Sa(n\pi/2) & n\ par \\ 0 & n\ impar \end{cases}$
1 	Par Ancho de pulso τ	$\dfrac{\tau}{T} Sa\left(\dfrac{n\pi\tau}{T}\right)$
1 	Par	$\begin{cases} Sa^2(n\pi/2) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
2 	Impar	$\begin{cases} j(-1)^n/(n\pi) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
1 	Par	$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1-n^2)} & n\ par \\ 0 & n\ impar \end{cases}$

1.8 Extensión por periodicidad

	Par	$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi(1-n^2)} & n\ par \\ -j/4 & n=\pm 1 \\ 0 & otro \end{cases}$

- La función Sampling es: $Sa(x)=\dfrac{Sen(x)}{x}$

1.9 Teorema de Parseval

- La potencia de una señal f(·) es:

$$p = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, f^*(t)\, dt$$

- Si se expresa f(·) mediante serie exponencial:

$$p = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^{\,*} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^{\,*} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(m-n)\omega_0 t} dt$$

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^{\,*} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

1.9 Teorema de Parseval

- El teorema de Parseval indica que:

$$p = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) \right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| F_n \right|^2$$

- La potencia de la señal completa es la suma de las potencias de cada frecuencia
- Ej: Determinar la potencia de la función:

$$f(t) = 2sen(100t)$$

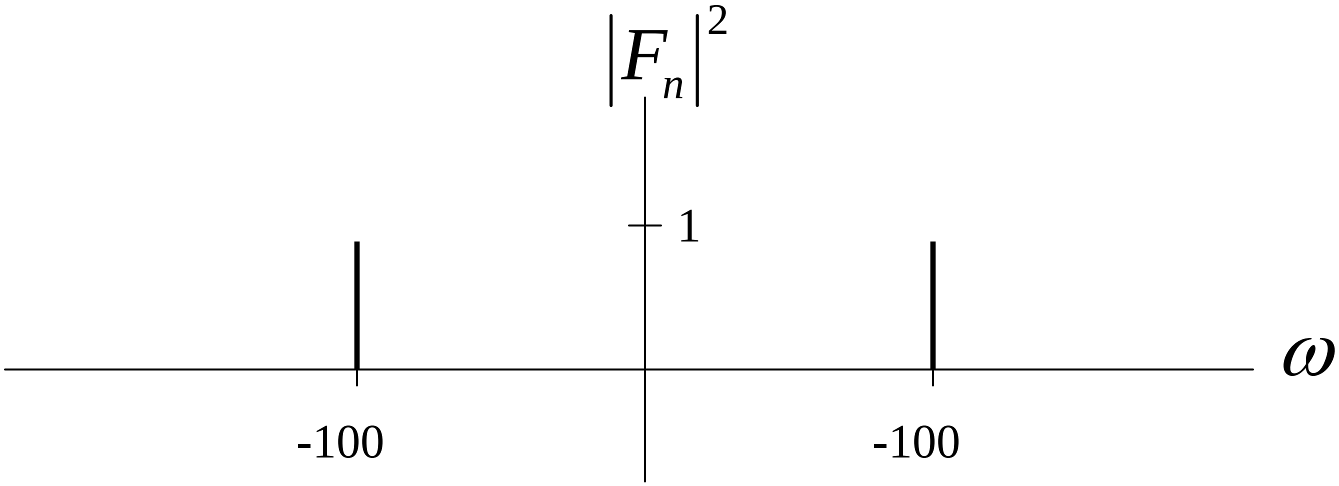
1.9 Teorema de Parseval

- Los coeficientes de Fourier son:

$$F_1 = -j,\ F_{-1} = j,\ F_n = 0 \text{ para otro } n$$

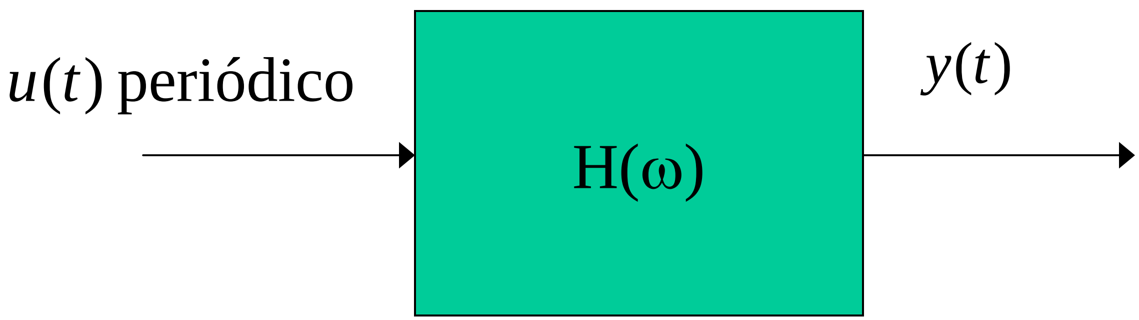
- Luego:

$$P = |j|^2 + |-j|^2 = 2$$



1.10 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Consideremos un sistema lineal H(ω) (un filtro lineal) que tiene una entrada periódica u(t) y una salida y(t) en régimen permanente:



$$\mathrm{u(t)} = \mathrm{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t+\phi_1)} \Rightarrow y(t) = AH(\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t+\phi_1)}$$

1.10 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Luego, al ser el sistema lineal, la respuesta a una señal periódica es:

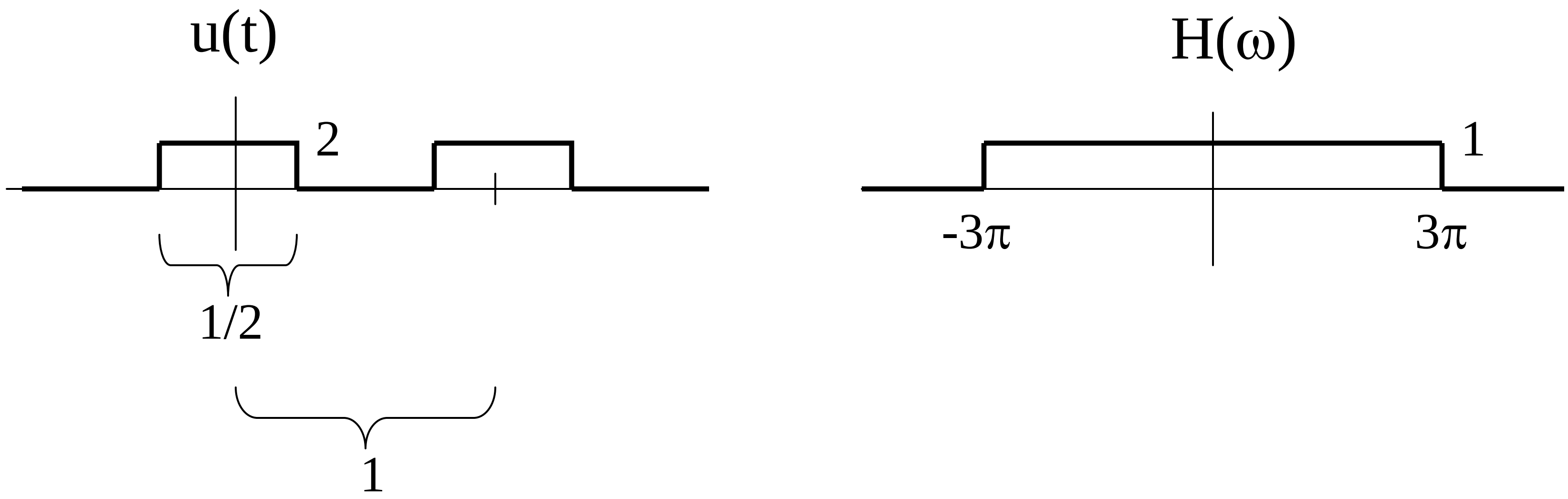
$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{j(n\omega_0 t + \phi_n)} \Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n H(n\omega_0) e^{j(n\omega_0 t + \phi_n)}$$

- La potencia de la salida es:

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|U_n\right|^2 \left|H(n\omega_0)\right|^2$$

1.10 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Ej. Determinar la salida cuando la entrada y el filtro son los siguientes



1.10 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- La entrada se puede escribir como:

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{sen(n\pi/2)}{n\pi/2}e^{jn2\pi t}$$

- La salida está limitada en frecuencia

$$y(t)=1+\frac{4}{\pi}\cos(2\pi t)$$

1.10 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Potencia promedio en la entrada:

$$P_u = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)|^2\, dt = \int_{-1/4}^{1/4} 4\, dt = 2$$

- Potencia promedio en la salida:

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |U_n|^2 |H(n\omega_0)|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 1.811$$

1.11 Espectro de Fourier

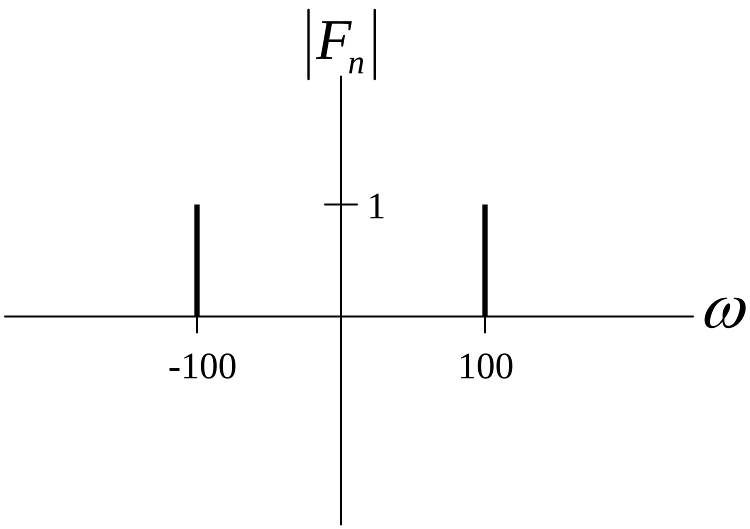
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- Señal periódica = suma de exponenciales complejas multiplicadas por coeficientes F_n
- F_n: asociado a la amplitud de la frecuencia $n\omega_0$.
- Se puede hacer un gráfico amplitud / frecuencia
- Los F_n se dibujan como líneas verticales
- => Espectro de la señal

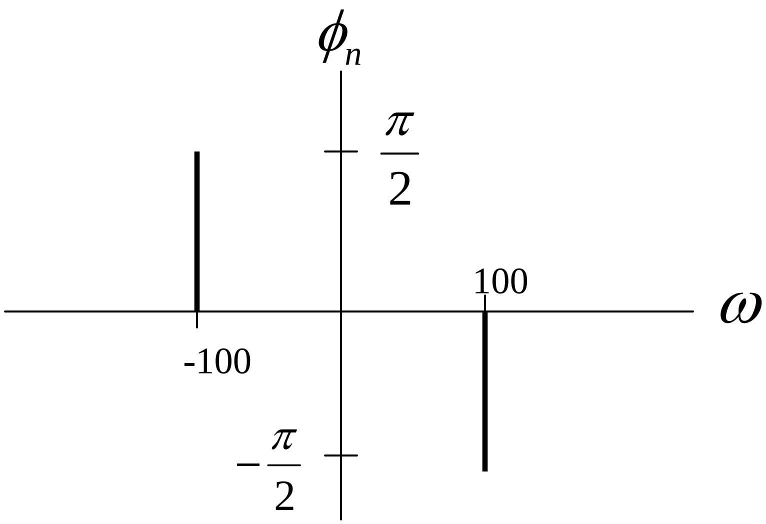
1.11 Espectro de Fourier

- Ej: Espectro de la función $f(t) = 2\,sen(100t)$

$$\omega_0 = 100, \quad f(t) = (j)e^{-j100t} + (-j)e^{j100t}$$



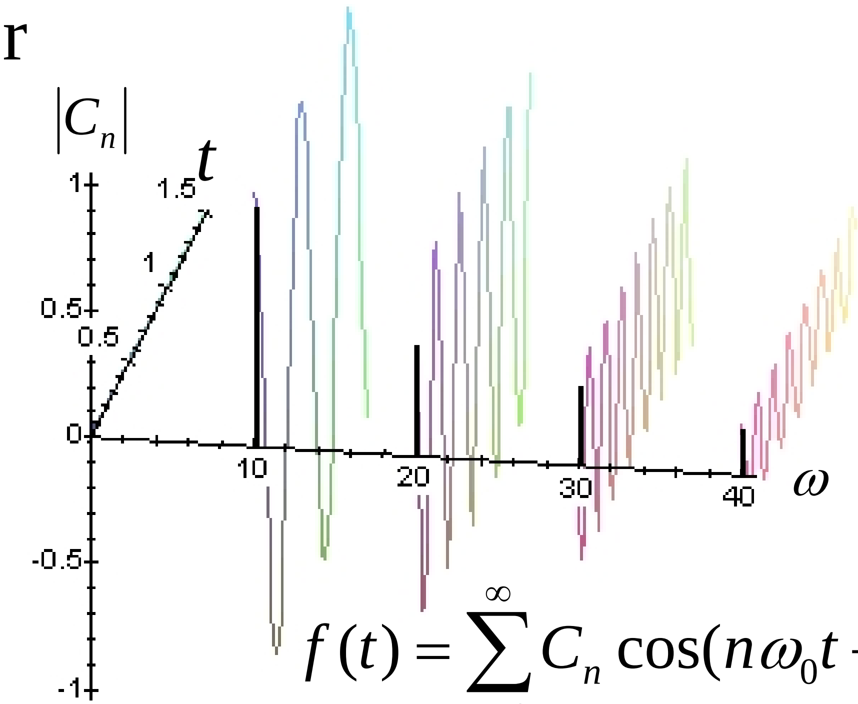
Espectro de magnitud



Espectro de fase

1.11 Espectro de Fourier

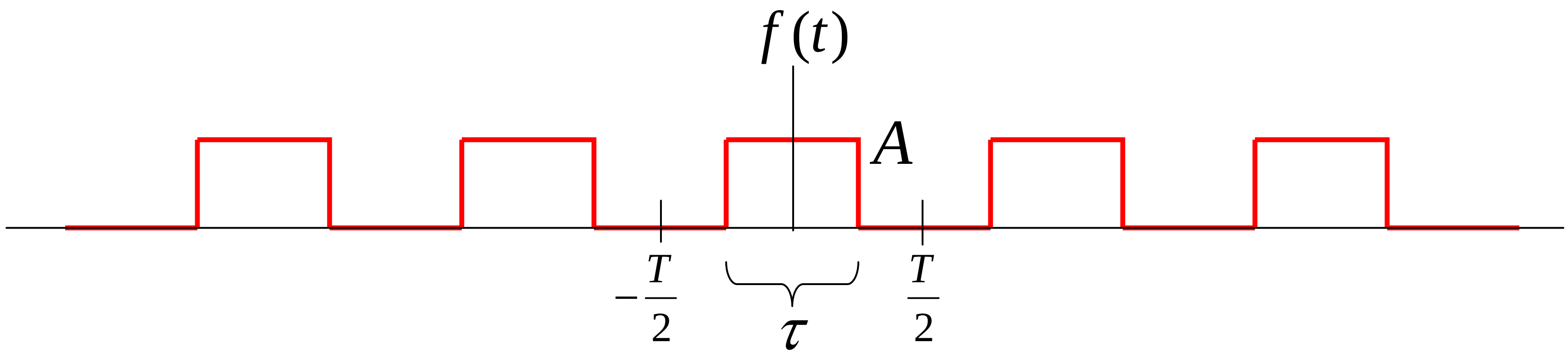
- También se puede generar un espectro trigonométrico a partir de la serie trigonométrica de Fourier



$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t+\phi_n)$$

1.11 Espectro de Fourier

- Ej. Espectro para tren de pulsos periódico



$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-jn\omega_0 t}dt$$

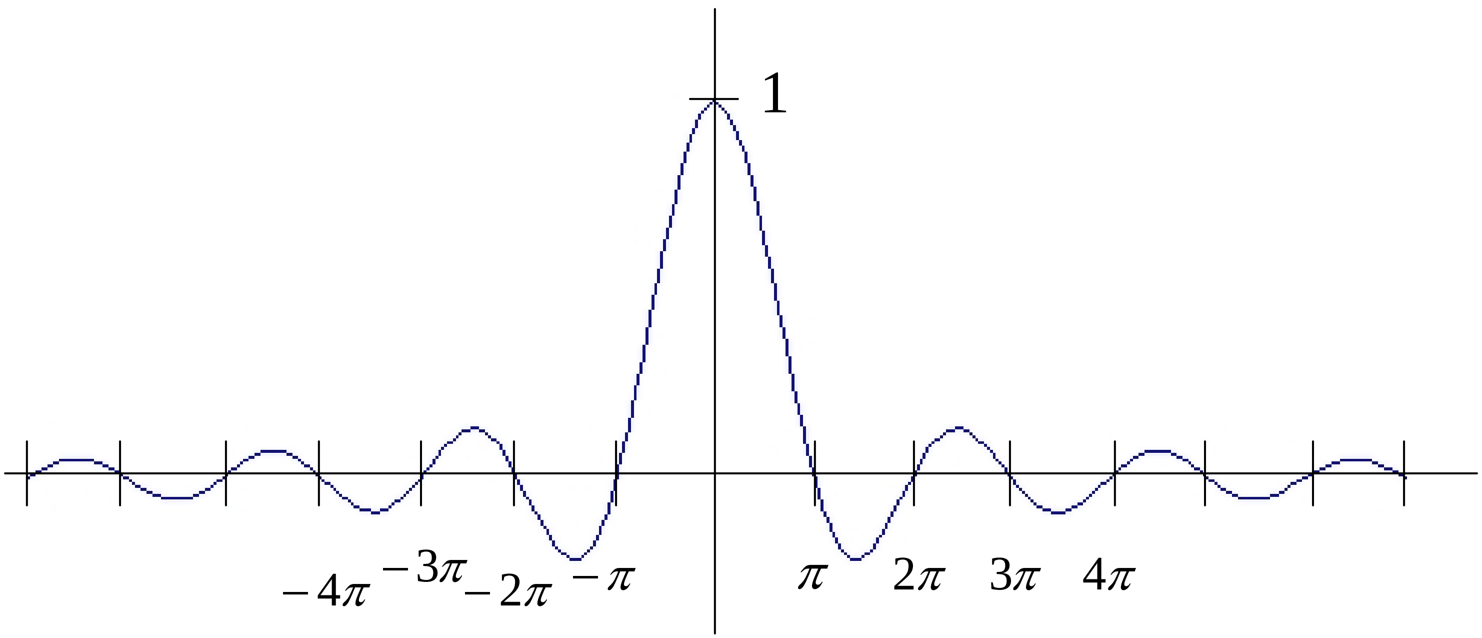
$$F_n = \frac{-A}{jn\omega_0 t}\left(e^{-jn\omega_0\tau/2} - e^{jn\omega_0\tau/2}\right) = \frac{2A}{n\omega_0 t}sen(n\omega_0\tau/2)$$

$$F_n = \frac{A\tau}{T}\frac{sen(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}$$

Néstor Becerra Yoma

1.11 Espectro de Fourier

$$F_n = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \qquad Sa(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

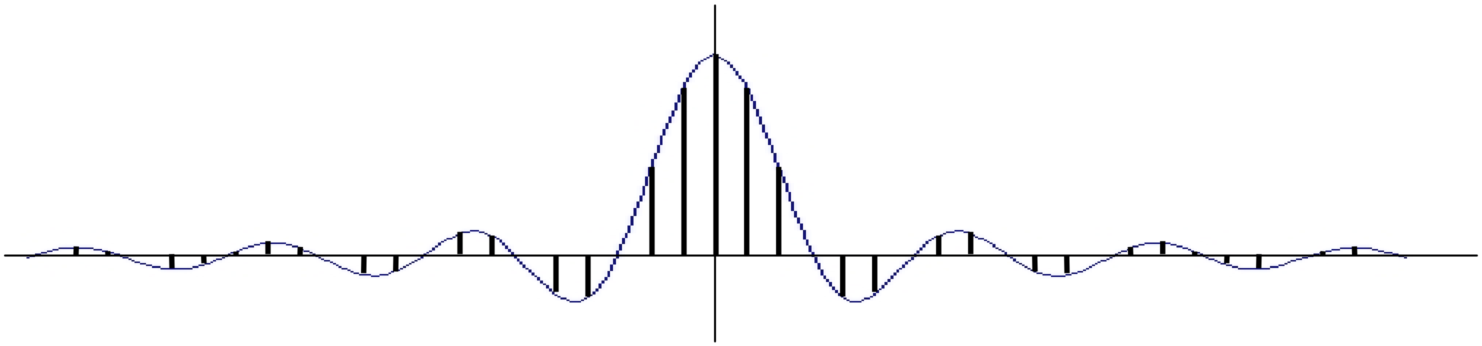


Función Sa(·)

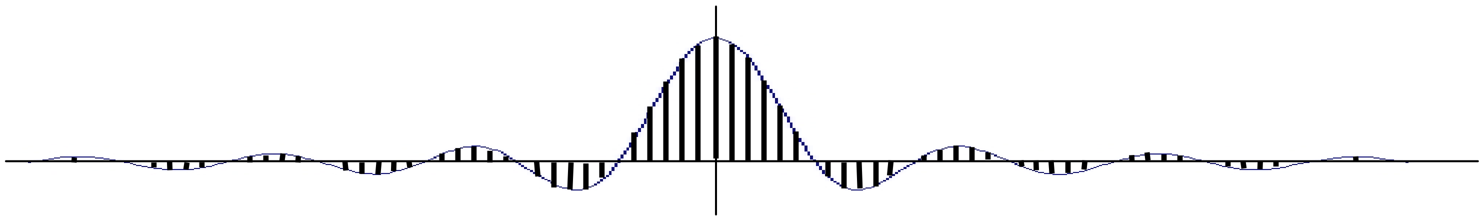
1.11 Espectro de Fourier

$$f(t)=\frac{A\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)e^{jn\omega_0 t}$$

Con τ fijo:



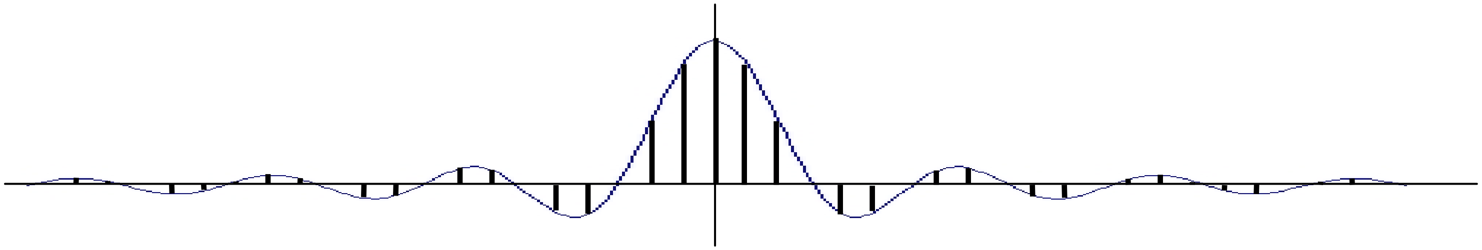
Al aumentar T:



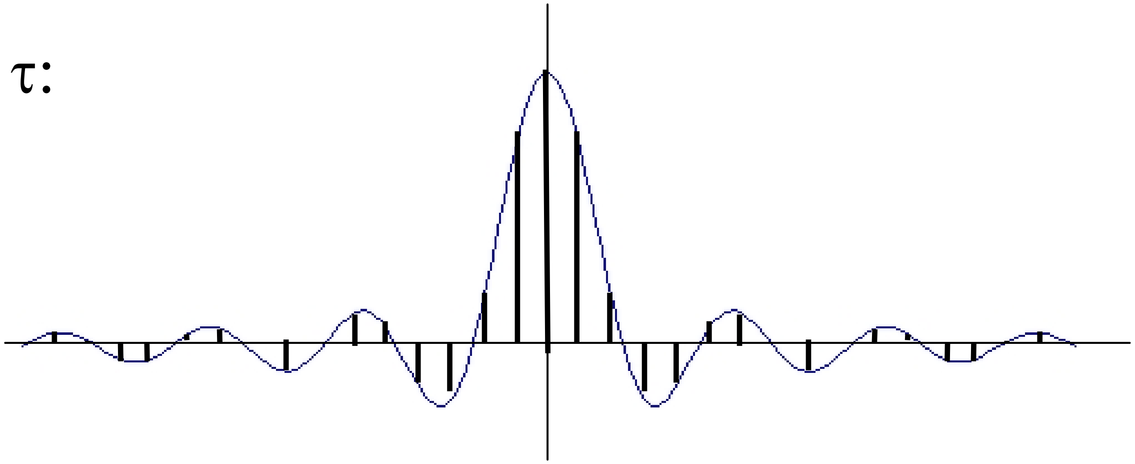
1.11 Espectro de Fourier

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

Con T fijo:



Al aumentar τ:



1.11 Espectro de Fourier

- Distancia entre líneas espectrales depende de T
- Distancia entre cruces por cero de Sa(·) depende de τ

1.12 Funciones singulares

- Son idealizaciones matemáticas (no es posible generar esas señales físicamente)
- Ejemplo: Función impulso unitario o delta de Dirac, se define de modo indirecto mediante la siguiente propiedad:

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0) & a < t_0 < b \\ 0 & otro\ \ caso \end{cases}$$

- Esta propiedad se cumple para cualquier función f(·) continua en t_0

1.12 Funciones singulares

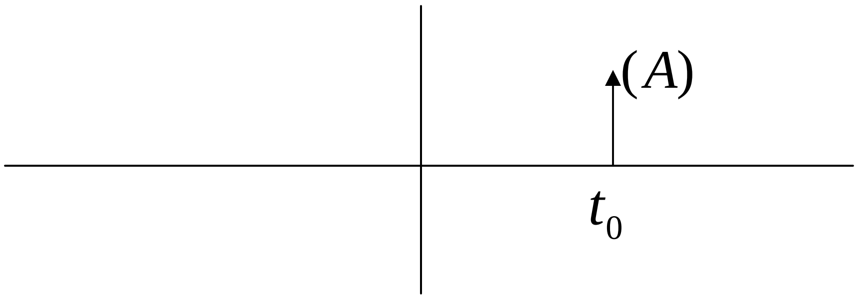
- Ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\cos(t)}\delta(t-\pi)dt = e^{\cos(t)}\Big|_{t=\pi} = e^{\cos(\pi)} = e^{-1} \approx 0{,}368$$

- Propiedades:
  - δ(t) tiene área unitaria: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
  - Amplitud de δ(t): $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ indefinida(\infty) & t = 0 \end{cases}$

1.12 Funciones singulares

- Representación gráfica: flecha de tamaño proporcional al área que “encierra”.



- Ojo: Propiedad poco conocida: factor de escala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\delta(x)dx = \frac{1}{|a|} \Rightarrow \boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)}$$

1.12 Funciones singulares

- Ejemplo:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} t^2 e^{-sen(t)} \cos(2t)\delta(2t-2\pi)dt = \frac{1}{2}\int_{t=-\infty}^{\infty} t^2 e^{-sen(t)} \cos(2t)\delta(t-\pi)dt = \frac{1}{2}\pi^2$$

- Multiplicación por función:

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

- Relación con el escalón:

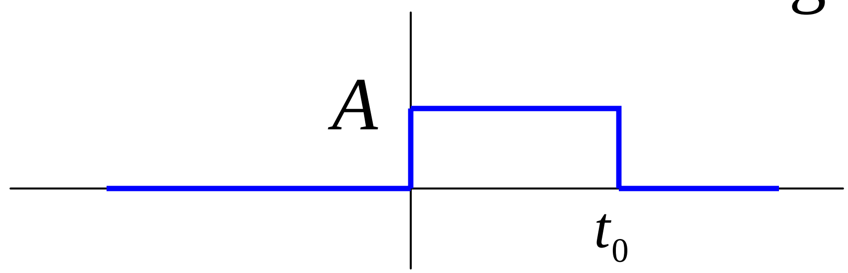
$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

$$\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt}u(t-t_0)$$

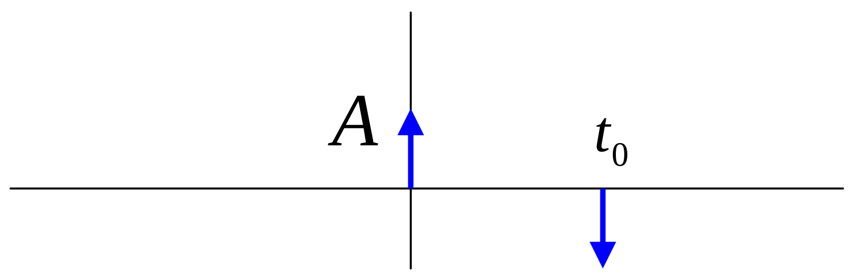
Se prueba integrando entre $-\infty$ y t' a ambos lados

1.12 Funciones singulares

- Ejemplo: Calcular la derivada del siguiente pulso:



$$f(t) = Au(t) - Au(t - t_0) \Rightarrow \frac{df}{dt}(t) = A\delta(t) - A\delta(t - t_0)$$



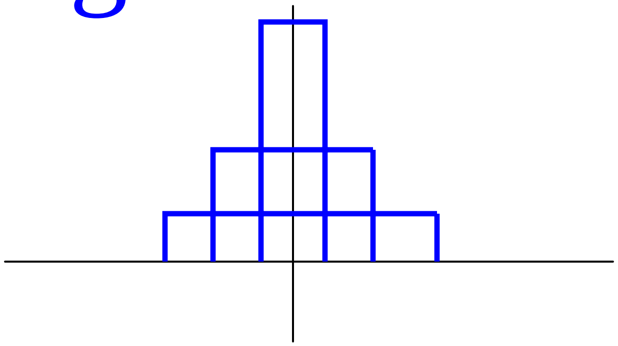
1.12 Funciones singulares

- Obtención de $\delta(t)$ mediante límite:
  - Se elige una función continua de área unitaria
  - Se comprime horizontalmente preservando el área
  - En el límite, se obtiene $\delta(t)$

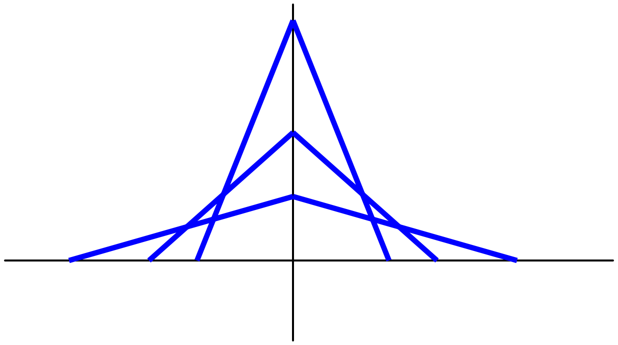
$$f(t) \text{ continua y } \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \Rightarrow \lim_{K \to 0+} \frac{1}{K} f(Kt) = \delta(t)$$

1.12 Funciones singulares

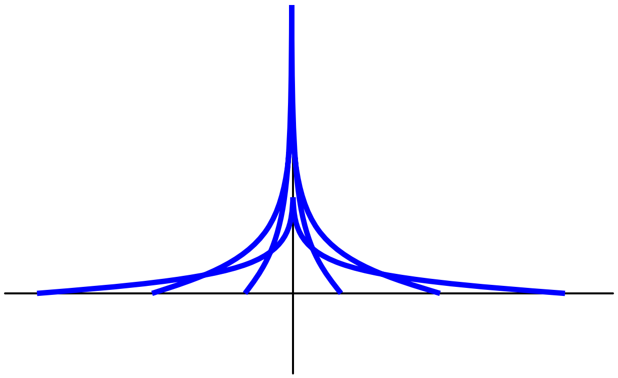
$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left[u(t + \tau / 2) - u(t - \tau / 2) \right]$$



$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{|t|}{\tau} \right)$$

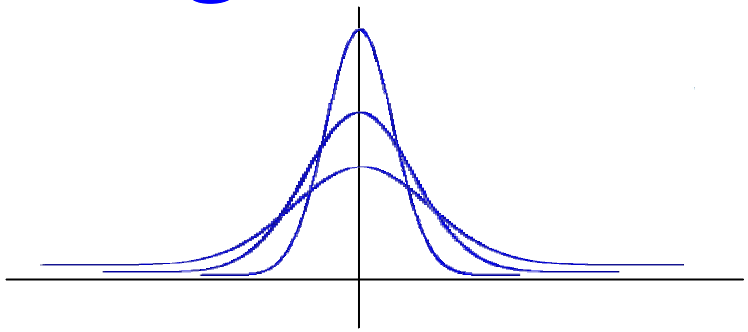


$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} e^{-2|t|/\tau}$$

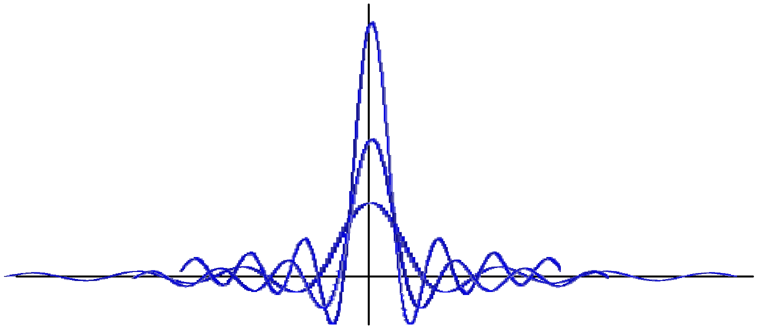


1.12 Funciones singulares

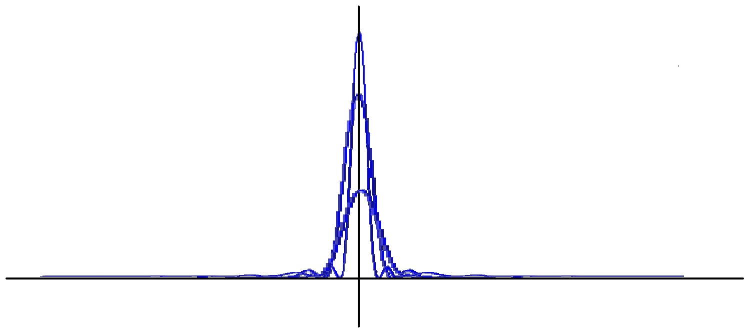
$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} e^{-\pi (t/\tau)^2}$$



$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} Sa(\pi t / \tau)$$



$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} Sa^2(\pi t / \tau)$$



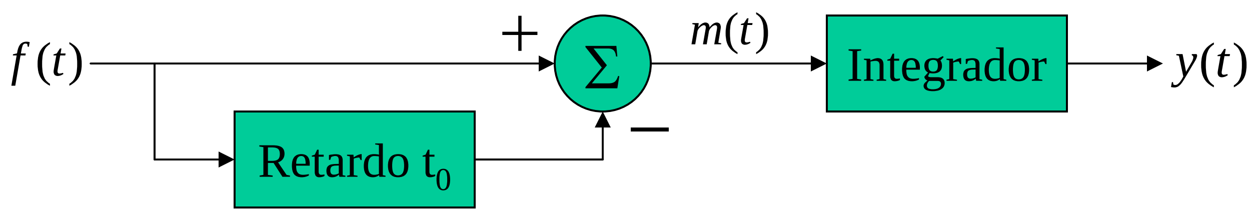
1.13 Respuesta al Impulso

- Impulso => función muy localizada en el tiempo
- Respuesta al impulso $\delta(t-t_0)$ => respuesta de un sistema lineal invariante frente a un estímulo que ocurre puntualmente en t_0
- Permite identificar un filtro en forma rápida si se usa una función “parecida” a un impulso

$$y(t) = \Re\{f(t)\},\ h(t) = \Re\{\delta(t)\}$$

1.13 Respuesta al Impulso

- Ejemplo: encontrar la respuesta al impulso para el siguiente sistema:



$$f(t) = \delta(t)$$

$$m(t) = \delta(t) - \delta(t - t_0)$$

$$h(t) = y(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(t) - \delta(t - t_0)\right] dt = u(t) - u(t - t_0)$$

1.13 Respuesta al Impulso

- Si el sistema es lineal y h(t) es la respuesta al impulso, se cumple:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$h(t) = \Re\{\delta(t)\}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

1.13 Respuesta al Impulso

- f(t) se puede escribir así:

$$y(t) = \Re\{f(t)\} = \Re\left\{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

- Como $\Re$ es lineal, y como la integral es como una sumatoria, se puede aplicar superposición:

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \Re\{f(\tau)\delta(t-\tau)\}d\tau$$

- f(τ) es una constante dentro de la integral, ya que la variable es t

1.13 Respuesta al Impulso

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\Re\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Luego, al conocer la respuesta al impulso h(t) de un sistema lineal, es posible calcular la salida para cualquier posible entrada calculando la convolución entre f(t) y h(t).