



# Apéndice A: Filtros Digitales

- Dos tipos: FIR, IIR

## **FIR (Finite Impulse Response):**

- La salida es función únicamente de la entrada .
- El polinomio que describe este filtro:

$$Y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + \dots + a_kx(n-k)$$

- Un filtro FIR también se puede definir por:

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_k]$$

## ***¿Porqué Respuesta Impulsiva Finita?***

# Filtros Digitales

## **IIR (Infinite Impulse Response):**

- La salida en  $n$  depende de la entrada y de la salida hasta  $n-1$ .
- El polinomio que describe este filtro:

$$Y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + \dots + a_kx(n-k) \\ + b_1y(n-1) + b_2y(n-2) + \dots + b_Ly(n-L)$$

- Un filtro IIR también se puede definir por:

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_k] \quad y \quad B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \quad b_L]$$

## ***¿Porqué Respuesta Impulsiva Infinita?***

## ***¿Estabilidad?***

# Transformada Z

Se emplea para analizar sistemas discretos.

(De forma similar como opera Laplace para sistemas continuos).

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Mediante las propiedades de la transformada Z se puede concluir:

$$x(n) \leftrightarrow X(z)$$

$$x(n-k) \leftrightarrow X(z)z^{-k}$$

# Transformada Z

## Ejemplo:

Considere el filtro FIR

$$Z\{y(n)\} = Z\{a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + \dots + a_kx(n-k)\}$$

$$Z\{y(n)\} = Z\{a_0x(n)\} + Z\{a_1x(n-1)\} + Z\{a_2x(n-2)\} + \dots + Z\{a_kx(n-k)\}$$

$$Z\{y(n)\} = a_0Z\{x(n)\} + a_1Z\{x(n-1)\} + a_2Z\{x(n-2)\} + \dots + a_kZ\{x(n-k)\}$$

$$Y(z) = a_0X(z) + a_1X(z)z^{-1} + a_2X(z)z^{-2} + \dots + a_kX(z)z^{-k}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_kz^{-k} = H(z)$$

# Transformada Z

## Ejercicio:

¿Cual es la función de transferencia  $H(z)$  de un filtro IIR?

# Respuesta en Frecuencia

- La respuesta en frecuencia de un sistema discreto se puede estimar reemplazando  $Z$  por:

$$z = e^{+j\omega} = \cos(\omega) + j\text{sen}(\omega)$$

$$H(z) = 1 + az^{-1}$$

**Ejemplo: Sea**

$$H(e^{+j\omega}) = 1 + ae^{-j\omega} = 1 + a[\cos(\omega) - j\text{sen}(\omega)]$$

$$H(e^{+j\omega}) = 1 + a \cdot \cos(\omega) - j \cdot a \cdot \text{sen}(\omega)$$

$$|H(e^{+j\omega})| = \sqrt{1 + 2a \cos(\omega) + a^2}$$

$$\angle H(e^{+j\omega}) = \arctan \left( \frac{-a \text{sen}(\omega)}{1 + a \cos(\omega)} \right)$$

# Respuesta en Frecuencia

**Ejercicio:**

Grafique

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| \quad \text{en} \quad H(z) = 1 + az^{-1}$$

Para  $a=0.9$  y  $a=-0.9$ . Determine para cada caso el tipo de filtro: pasa bajas, pasa-altas, pasa-banda, o rechaza-banda.