Análisis de Señales

Capítulo III: Transformada de Fourier discreta

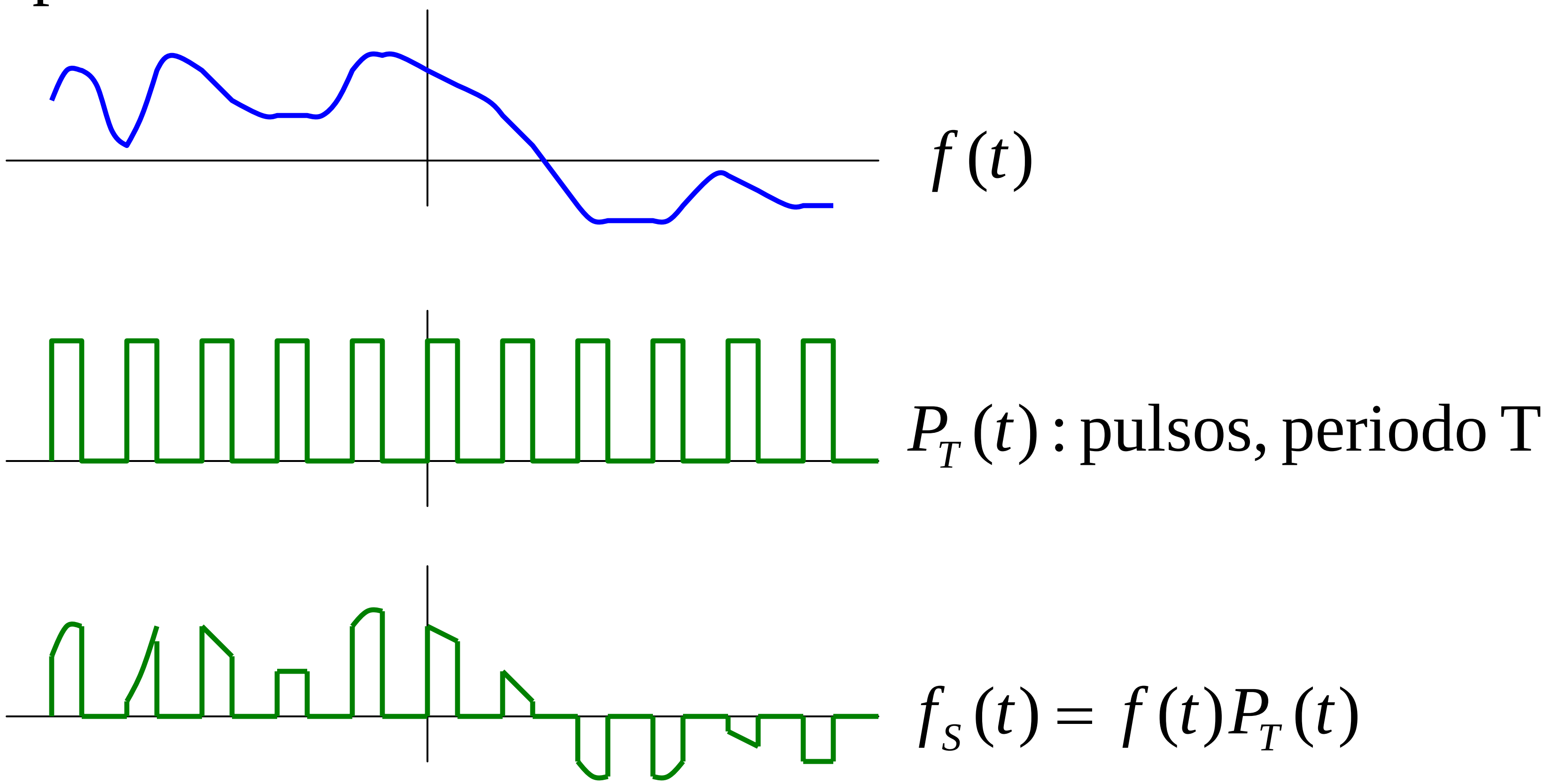
Profesor: Néstor Becerra Yoma

3.1 Teorema del Muestreo

- Gran desarrollo de la computación => digitalización de señales mediante muestreo, posterior reconstrucción de la señal
- Condición necesaria en el proceso para no perder información: teorema del muestreo:
  - Una señal de ancho de banda B [Hz] puede ser muestreada sin pérdida de información si se toman valores con una separación menor o igual a 1/(2B) segundos.

3.1 Teorema del Muestreo

- Primera aproximación: muestreo usando tren de pulsos



3.1 Teorema del Muestreo

$$f_S(t) = f(t)P_T(t)$$ $P_T(\cdot)$ es periódica

$$f_S(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}$$

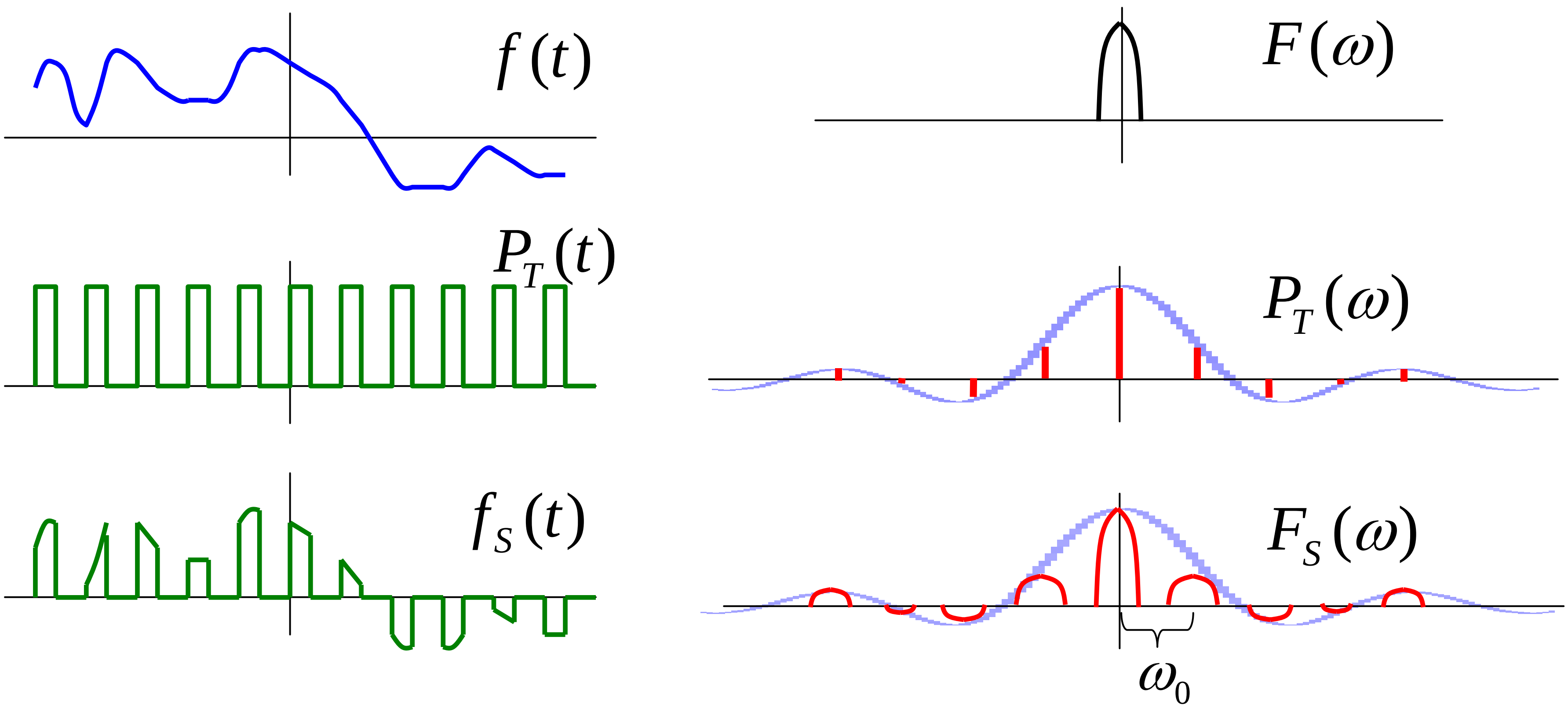
$$\Im\{f_S(t)\} = \Im\left\{ f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t} \right\}$$

$$\Im\{f_S(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \Im\left\{ f(t) e^{jn\omega_0 t} \right\}$$

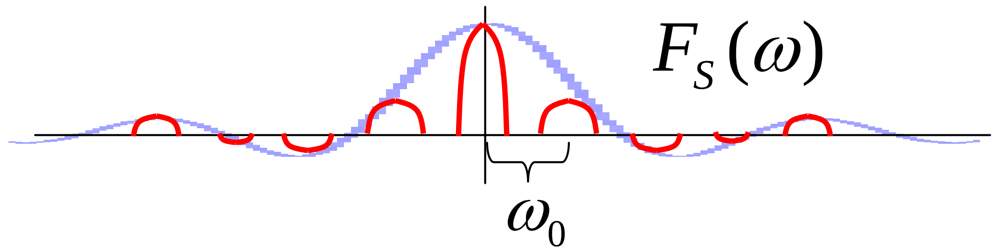
$$\Im\{f_S(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_0)$$ El espectro $F(\omega)$ se repite

3.1 Teorema del Muestreo

$$\Im\{f_S(t)\} = P_0 F(\omega) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



3.1 Teorema del Muestreo



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

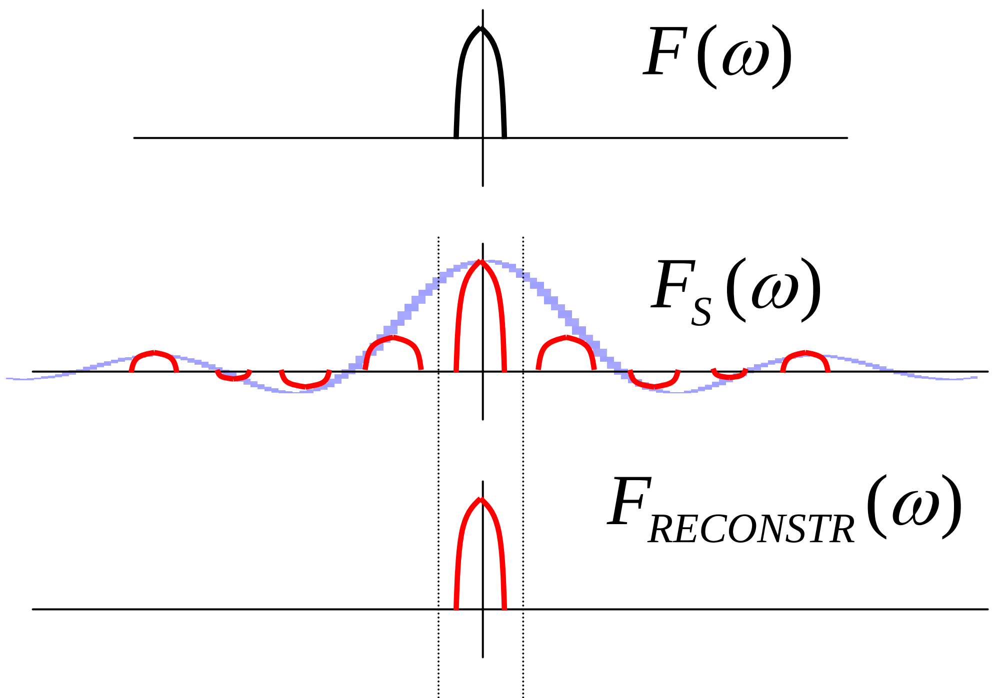
- Si el T de muestreo aumenta => ω_0 disminuye => se puede producir traslape de espectros para T muy grande. El traslape se alcanza cuando:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2W \Rightarrow T = \frac{1}{2B} \quad \text{(frecuencia de Nyquist)}$$

- Para evitar traslape: $T < \dfrac{1}{2B}$

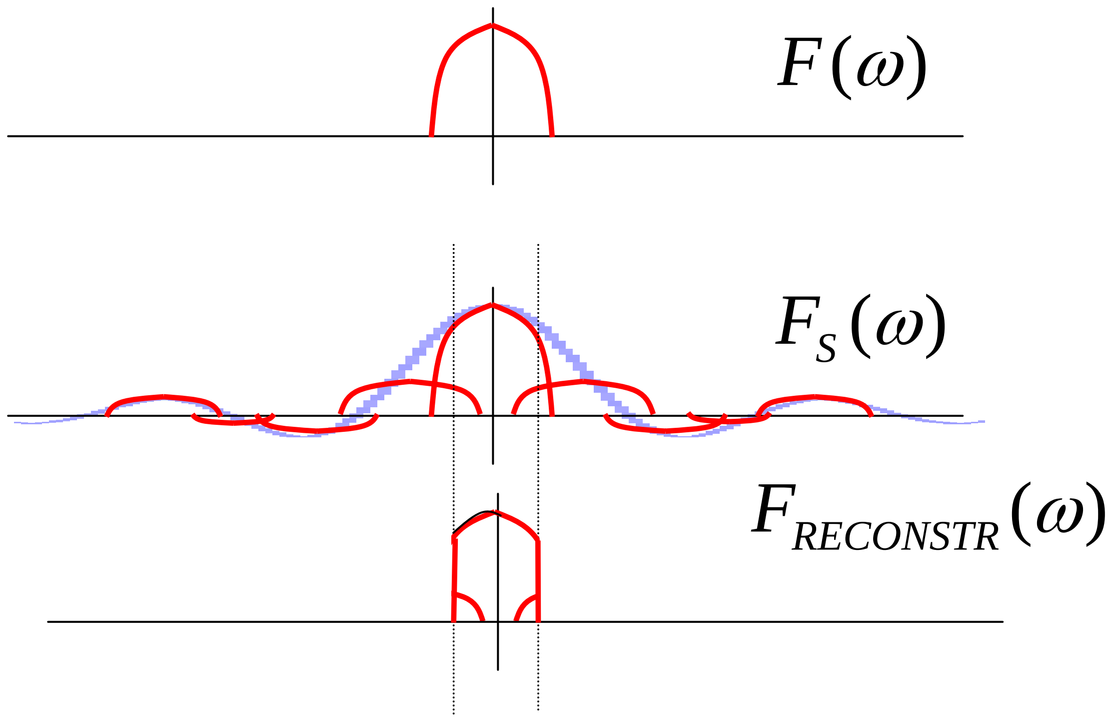
3.1 Teorema del Muestreo

- Reconstrucción de la señal => efecto práctico: pasa la banda entre $-\omega_0/2$ y $\omega_0/2$



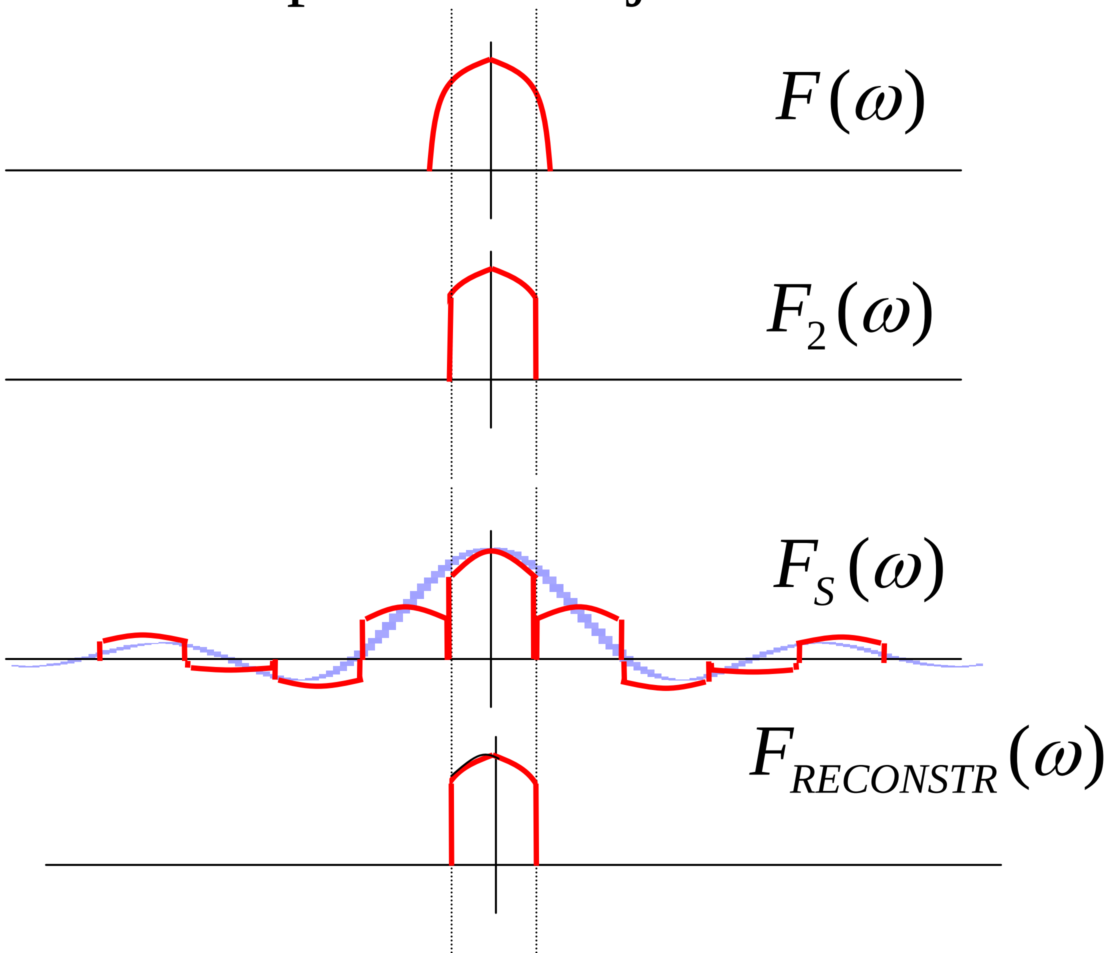
3.2 Efecto alias

- Traslape espectral: efecto alias, T muy grande
- Resultado: distorsión de la señal al reconstruirla.



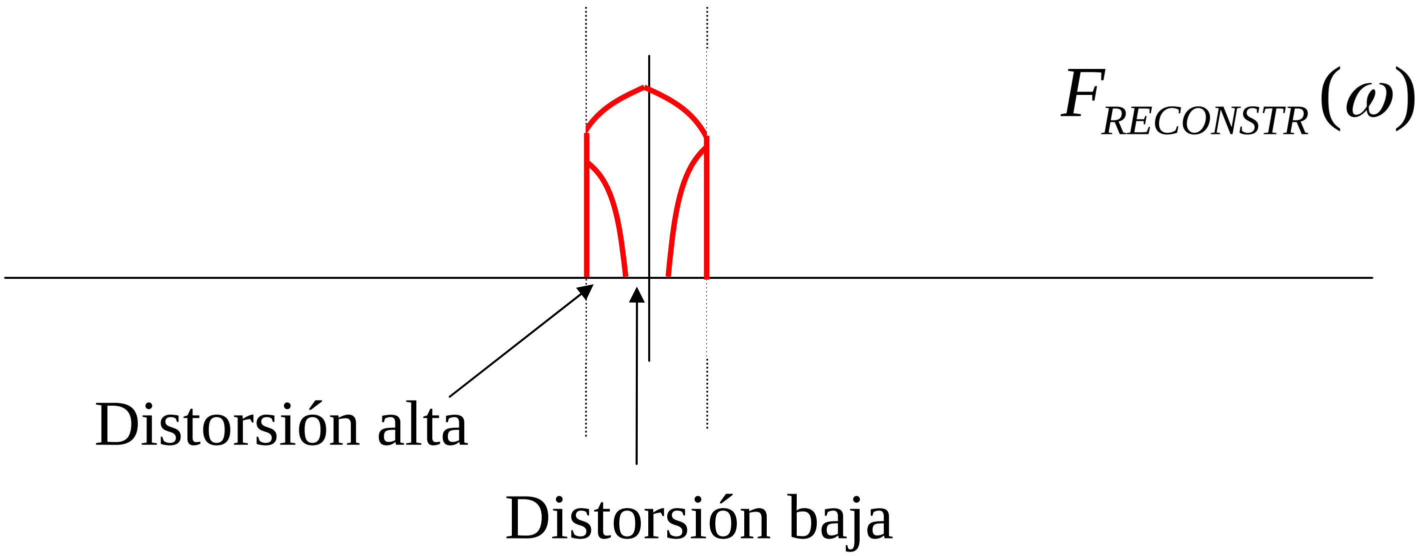
3.2 Efecto alias

- Solución: filtro prealias: baja la distorsión



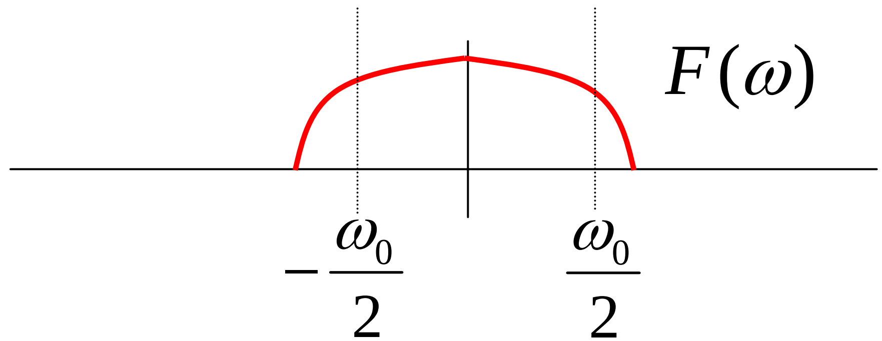
3.2 Efecto alias

- En general, el espectro de una señal se hace menor a medida que aumenta la frecuencia
- La principal distorsión se produce cerca de $\omega_0/2$



3.2 Efecto alias

- Estimación de la cantidad de efecto alias (comparativo):



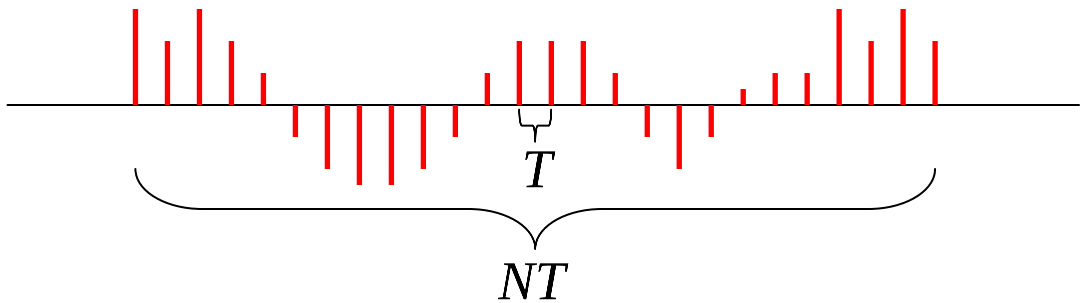
$$\%alias = \frac{\int_{\omega=\omega_0/2}^{\infty} \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}\right)^2 \left|F(\omega)\right|^2 d\omega}{\int_{\omega=0}^{\omega_0/2} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega}$$

- El término cuadrático penaliza el alias para frecuencias cercanas a $\omega_0/2$

3.3 Transformada de Fourier discreta

- Se tiene N muestras uniformemente distribuidas

$$f(kT) = f(0), f(T), f(2T), \dots, f\big((N-1)T\big)$$



- La transformada de Fourier discreta (DFT) se define como:

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\, n\Omega\, kT} \qquad \Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

3.3 Transformada de Fourier discreta

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j\,n\Omega\,kT} \qquad \Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

$$\Rightarrow F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j\,n\frac{2\pi}{N}k}$$

- Ω y T no aparecen de forma explícita en la DFT
- Se puede obtener a partir de la transformada de Fourier, haciendo aproximaciones

3.3 Transformada de Fourier discreta

- Sea:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \le t < NT \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

- Su transformada es:

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{t=0}^{NT} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad / \omega \to n\Omega,\ t \to nT$$

$$\tilde{F}(n\Omega) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jn\Omega kT} T$$

- Luego:

$$TF_D(n\Omega) = \tilde{F}(\omega)\,|_{\omega = n\Omega}$$

3.3 Transformada de Fourier discreta

- El espectro obtenido es periódico, de periodo NΩ:

$$F_D(n\Omega + N\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j(n\Omega + N\Omega)kT}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-jn\Omega kT}e^{-jN\Omega kT} \qquad / \,\Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-jn\Omega kT}e^{-j2\pi k} = F_D(n\Omega)$$

3.3 Transformada de Fourier discreta

- La exactitud en el cálculo de la transformada también es afectada por el efecto alias.
- La transformada es periódica => la frecuencia más alta que se puede determinar corresponde a $n=N/2$, es decir, $(N/2)\Omega=1/(2T)$ => de acuerdo al teorema del muestreo

3.3 Transformada de Fourier discreta

- También hay una transformada inversa de Fourier discreta:

$$f(kT) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_D(n\Omega)e^{jn\Omega k\mathrm{T}}$$

- La transformada inversa es exacta respecto a la transformada directa, a menos que se produzca efecto alias.
- La transformada inversa es periódica, periodo NT
- Propiedades semejantes a la transformada de Fourier continua.

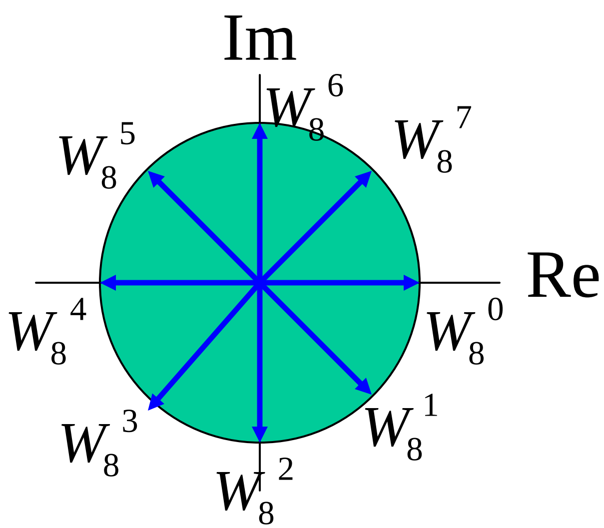
3.4 Transformada de Fourier rápida

- El cálculo de la DFT requiere N^2 multiplicaciones.
- Tiempo de cálculo excesivo para N grande.
- Algoritmo FFT (fast Fourier transform): permite calcular la DFT de forma rápida: $N\log_2 N$ multiplicaciones.
- Dos formas de visualizarla: a partir de sumas por bits o a partir de paridad/imparidad.

3.4 Transformada de Fourier rápida

- La notación W_N para la exponencial de la DFT:
  - Dado N, se define W_N como el círculo unitario dividido en N partes, con ángulos negativos

$$W_N = e^{-j\Omega T} = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad \Rightarrow \quad W_N = 1\angle\frac{-360^{\circ}}{N}$$



$$W_N^{N\,x} = e^{-j2\pi\frac{N}{N}x} = 1$$

$$W_N^{2} = e^{-j2\pi\frac{2}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

$$W_N^{x}* = W_N^{-x} = W_N^{(N-x)}$$

3.4 Transformada de Fourier rápida

- Forma 1 (ejemplo para 4 puntos):

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j n\Omega kT}$$

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{3} f(kT) W_4^{nk}, \;\; W_N = e^{-j\Omega T} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

- Se pueden escribir k y n como números binarios:

$$k = (k_1, k_0) = \{00, 01, 10, 11\}, \;\; k = 2k_1 + k_0$$

$$n = (n_1, n_0) = \{00, 01, 10, 11\}, \;\; n = 2n_1 + n_0$$

3.4 Transformada de Fourier rápida

- Luego:

$$F_D(n_1,n_0)=\sum_{k_0=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1} f(k_1,k_0)W_4^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}$$

$$W_4^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}=W_4^{2n_0k_1}W_4^{(2n_1+n_0)k_0}$$

$$W_4^{4n_1k_1}=1$$

$$F_D(n_1,n_0)=\underbrace{\sum_{k_0=0}^{1}\left(\underbrace{\sum_{k_1=0}^{1} f(k_1,k_0)W_4^{2n_0k_1}}_{f_1(n_0,k_0)}\right)W_4^{(2n_1+n_0)k_0}}_{f_2(n_0,n_1)}$$

3.4 Transformada de Fourier rápida

$$f_1(n_0,k_0)=\sum_{k_1=0}^{1} f(k_1,k_0)W_4^{2n_0k_1}$$

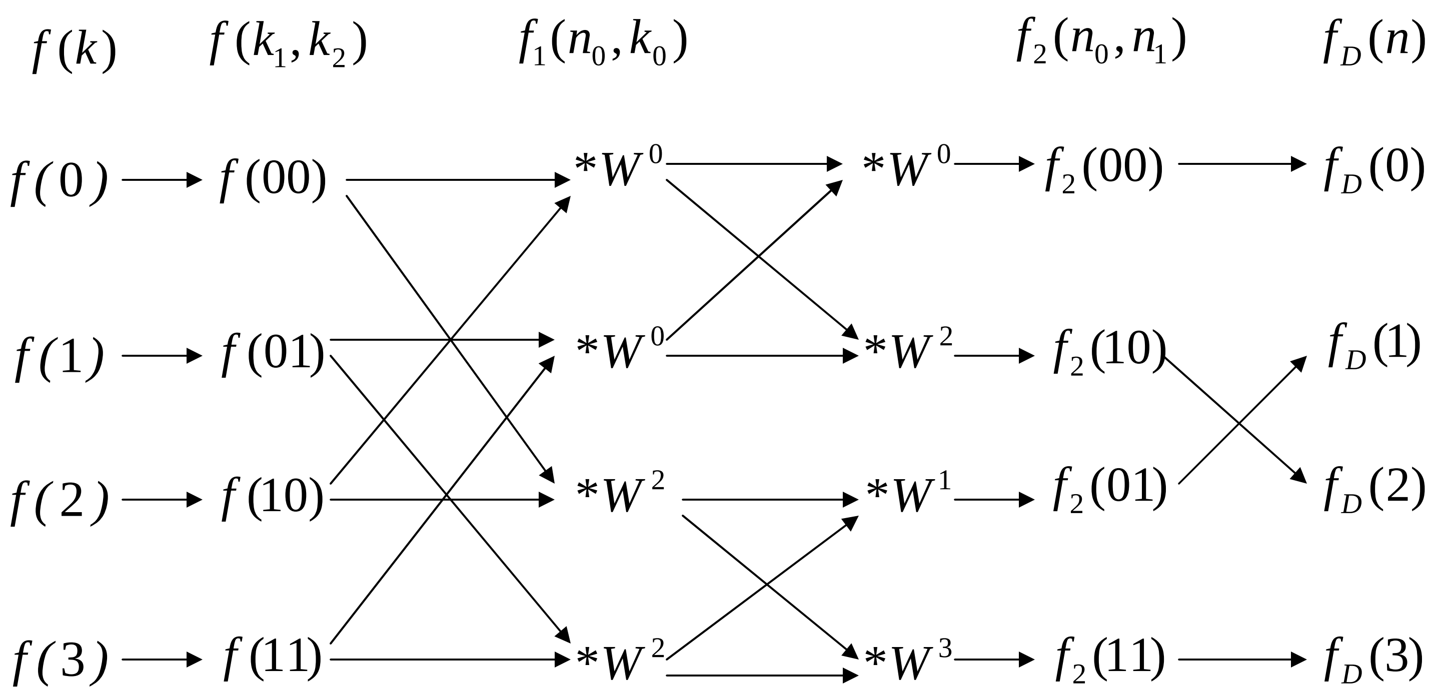
$$\left\{\begin{aligned}
&f_1(n_0,k_0)=\sum_{k_1=0}^{1} f(k_1,k_0)W_2^{n_0k_1}\\
&f_2(n_0,n_1)=\sum_{k_0=0}^{1} f_1(n_0,k_0)W_4^{(2n_1+n_0)k_0}\\
&F_D(n_1,n_0)=f_2(n_0,n_1)
\end{aligned}\right.$$

Una para pares, otra para impares

Suma ponderada de las anteriores

3.4 Transformada de Fourier rápida

- Ejemplo: “mariposa” para 4 puntos:



3.4 Transformada de Fourier rápida

- DFT: lento (N^2), requiere poca memoria
- FFT: rápido ($N \log_2 N$), requiere bastante memoria (recursivo), requiere que el número de puntos sea potencia de 2.

N	N^2	$N \log_2 N$
2	4	2
32	1024	160
256	2048	65536
1024	1048576	10240

3.4 Transformada de Fourier rápida

- Resumen FFT:
  - 1. Se elige el nº de muestras tal que $N=2^r$ con r entero. Si es necesario, se pueden incluir ceros aumentados.
  - 2. Para N muestras en el tiempo existen N frecuencias distintas.
  - 3. Como resultado de la extensión periódica, los puntos de muestra 0 y N son iguales, tanto en el tiempo como en la frecuencia ($f_0=f_N$; $F_{D0}=F_{DN}$)
  - 4. Las componentes de frecuencia positiva están en (0,N/2), las componentes de frecuencia negativa están en (N/2,N). Ocurre lo mismo en el tiempo (tiempos positivos y negativos)

3.4 Transformada de Fourier rápida

- 5. Para funciones de valor real, las componentes de frecuencia positiva son complejas conjugadas de las componentes de frecuencia negativa. Los puntos n=0 y n=N/2 son comunes a ambos, por lo que tienen valor real.
- 6. La componente de frecuencia más alta (es decir, n=N/2) corresponde a 1/(2T) [Hz]. La frecuencia máxima visible se puede aumentar disminuyendo el espaciamiento entre frecuencias en el tiempo

3.4 Transformada de Fourier rápida

– 7. El espaciamiento entre componentes de frecuencia es 1/(NT) [Hz], se puede disminuir agregando ceros aumentados a la secuencia de muestras

3.4 Transformada de Fourier rápida