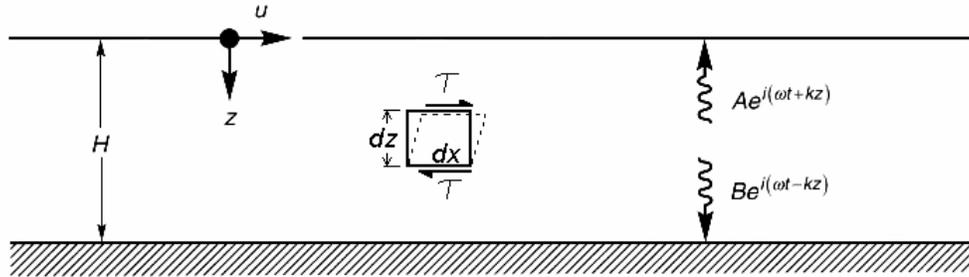


## TEORÍA DE LA AMPLIFICACIÓN DINÁMICA DE SUELOS

Para el análisis dinámico del comportamiento de suelos, se considerará el caso de un **Medio A (Suelo)**, que yace sobre un semi-espacio de un **Medio B (Roca)**, tal como muestra la figura.

Se supondrá la existencia de una **onda SH** que incidente verticalmente.



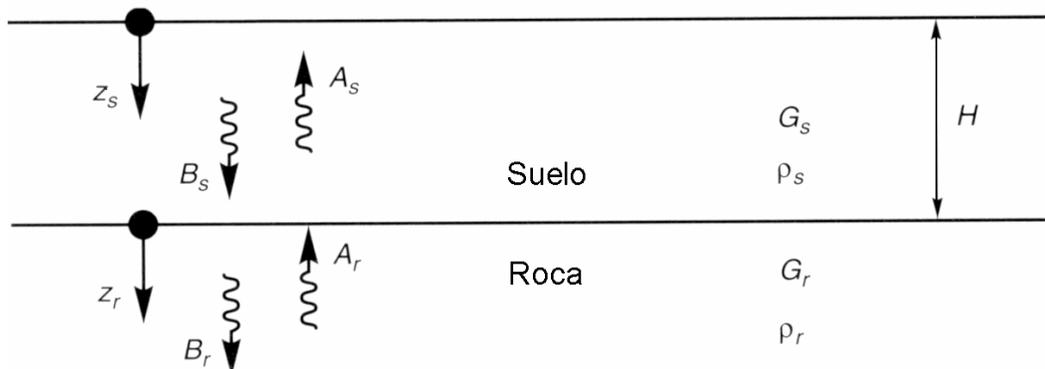
Al considerar la ecuación de equilibrio de fuerzas y la ecuación de definición de esfuerzo de corte, se puede establecer la **ecuación de movimiento** para cada uno de los medios como:

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow \frac{\partial \tau}{\partial z} \cdot \partial z \cdot dx = (\rho \cdot dz \cdot dx) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\tau = G \frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial z} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\therefore \rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = G_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} \quad ; \quad \rho_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = G_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}.$$

Utilizando la nomenclatura establecida en la siguiente figura para la onda **“incidente”** y **“reflejada”** en cada medio, la **“solución tipo”** de esta ecuación, para cada uno de los medios se puede establecer como:



$$u_s(t, z) = A_s e^{i(\omega t + k_s z)} + B_s e^{i(\omega t - k_s z)},$$

$$u_r(t, z) = A_r e^{i(\omega t + k_r z)} + B_r e^{i(\omega t - k_r z)}.$$

Al interior de cada medio, se puede establecer la **ecuación de tensión de corte** como:

$$\tau_s = G_s \frac{\partial u_s}{\partial z} \quad ; \quad \tau_r = G_r \frac{\partial u_r}{\partial z}.$$

El análisis de la situación en este caso permite establecer las siguientes **condiciones de borde** del problema:

- Superficie libre del suelo:  $\tau_s(t, z = 0) = 0$ .
- Continuidad de desplazamiento en la interfase de los suelos:  
 $u_s(t, z = H) = u_r(t, z = 0)$ .
- Continuidad de tensiones de corte en la interfase de los suelos:  
 $\tau_s(t, z = H) = \tau_r(t, z = 0)$ .

Las soluciones tipo, en conjunto con las condiciones de borde, permiten resolver el sistema de ecuaciones anteriores para determinar el valor absoluto del **cuociente entre las amplitudes de desplazamiento** entre los dos medios:

$$\bullet \quad \tau_s(t, z = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_s = G_s \frac{\partial u_s}{\partial z} = G_s \frac{\partial}{\partial z} \left( A_s e^{i(\omega t + k_s z)} + B_s e^{i(\omega t - k_s z)} \right)$$

$$\tau_s = A_s e^{i\omega t} - B_s e^{i\omega t} = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad A_s = B_s$$

$$\bullet \quad u_s(t, z = H) = u_r(t, z = 0) \quad \Leftrightarrow \quad A_s e^{i(\omega t + k_s H)} + A_s e^{i(\omega t - k_s H)} = A_r e^{i\omega t} + B_r e^{i\omega t}$$

$$A_s e^{ik_s H} + A_s e^{-ik_s H} = A_r + B_r \quad (*)$$

$$\bullet \quad \tau_s(t, z = H) = \tau_r(t, z = 0)$$

$$G_s k_s A_s \left( e^{ik_s H} - e^{-ik_s H} \right) = G_r k_r A_r - G_r k_r B_r$$

$$\frac{G_s k_s}{G_r k_r} A_s \left( e^{ik_s H} - e^{-ik_s H} \right) = A_r - B_r \quad (**)$$

Sumando las ecuaciones (\*) y (\*\*), y considerando la identidad trigonométrica  $e^{ikH} = \cos kH + i \operatorname{sen} kH$  y la variable auxiliar denominada **Razón de Impedancia**:

$$\alpha = \frac{G_s \cdot k_s}{G_r \cdot k_r} = \frac{G_s \cdot w/V_{Ss}}{G_r \cdot w/V_{Sr}} = \frac{G_s \sqrt{\rho_s/G_s}}{G_r \sqrt{\rho_r/G_r}} = \frac{\sqrt{\rho_s \cdot G_s}}{\sqrt{\rho_r \cdot G_r}} = \frac{\rho_s \cdot V_{Ss}}{\rho_r \cdot V_{Sr}},$$

se obtiene el siguiente cociente denominado **Función de Transferencia**:

$$e^{ik_s H} (A_s + \alpha A_s) + e^{-ik_s H} (A_s - \alpha A_s) = 2A_r$$

$$[\cos k_s H + i \operatorname{sen} k_s H] (A_s + \alpha A_s) + [\cos k_s H - i \operatorname{sen} k_s H] (A_s - \alpha A_s) = 2A_r$$

$$2 \cos k_s H \cdot A_s + 2i \operatorname{sen} k_s H \cdot \alpha A_s = 2A_r$$

$$\left\| \frac{A_s}{A_r} \right\| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 k_s H + \alpha^2 \operatorname{sen}^2 k_s H}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 k_s H + \alpha^2 (1 - \cos^2 k_s H)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 k_s H (1 - \alpha^2) + \alpha^2}}$$

Considerando las definiciones de número de onda ( $k$ ), longitud de onda ( $\lambda$ ), período de onda ( $T$ ) y velocidad de onda de corte ( $V_s$ ), el cociente recién mencionado adquiere su valor máximo para los siguientes períodos:

$$\left\| \frac{A_s}{A_r} \right\|_{\max} \quad \neg \quad \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad k_s H = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \cdot k = 2\pi \\ \lambda = V_s \cdot T \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{V_s \cdot T}$$

$$\frac{2\pi}{V_s \cdot T} H = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$T = \frac{4H}{V_s} \cdot \frac{1}{(2n - 1)} = \frac{4H}{V_s}, \quad \frac{4H}{3V_s}, \quad \frac{4H}{5V_s}, \quad \dots$$

Por lo anterior, se concluye que la respuesta de un depósito de suelos es altamente dependiente de la frecuencia del movimiento en la base, estando determinada su amplificación máxima **sólo por la razón de impedancia entre los estratos** y las frecuencias a las cuales esta amplificación ocurre, depende **solo de la geometría (espesor) y de las propiedades del material (velocidad de ondas de corte)** del estrato de suelo.

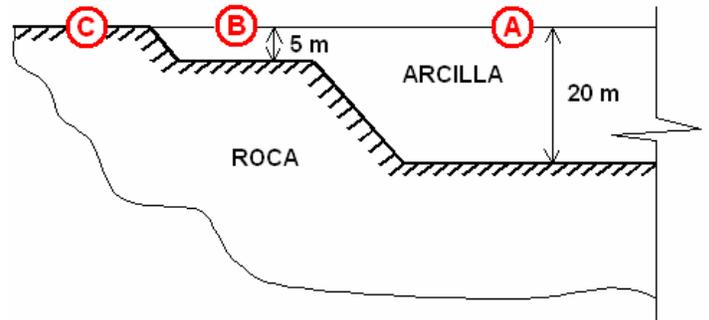
**Ejemplo:** Considere el esquema de la figura adjunta. Suponiendo la incidencia de una onda de corte vertical compare los movimientos sísmicos en los puntos **A**, **B** y **C**.

Las características dinámicas de la roca y de la arcilla son las siguientes:

$$V_{P \text{ arcilla}} = 450 [m/s] \quad V_{P \text{ roca}} = 1800 [m/s]$$

$$\nu_{\text{arcilla}} = 0.40 \quad \nu_{\text{roca}} = 0.30$$

$$\rho_{\text{arcilla}} = 1.6 [ton/m^3] \quad \rho_{\text{roca}} = 2.1 [ton/m^3]$$



La velocidad de Onda de Corte  $V_S$  y el Módulo de Rigidez  $G$  del suelo pueden calcularse considerando:

$$V_S = V_P \cdot \sqrt{\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}} \quad \text{y} \quad G = \rho \cdot V_S^2,$$

resultando en este caso:

$$V_{S \text{ arcilla}} = 184 [m/s], \quad G_{\text{arcilla}} = 54000 [ton/m \cdot s^2],$$

$$V_{S \text{ roca}} = 962 [m/s], \quad G_{\text{roca}} = 1944000 [ton/m \cdot s^2].$$

Los resultados se pueden comprobar **dimensionalmente** utilizando:

$$\lambda = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \quad \text{y} \quad V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}},$$

resultando:

$$\lambda_{\text{arcilla}} = 216000 [ton/m \cdot s^2] \quad \text{y} \quad \lambda_{\text{roca}} = 2916000 [ton/m \cdot s^2].$$

El máximo de la Función de Transferencia  $F_{\text{máx}}$ , se puede calcular a partir de la razón de impedancia  $\alpha$ , como:

$$\alpha = \frac{\rho_{\text{arcilla}} \cdot V_{S \text{ arcilla}}}{\rho_{\text{roca}} \cdot V_{S \text{ roca}}} = 0.145 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{máx}} = \frac{1}{\alpha} = 6.87$$

Los períodos a los que ocurre el primer máximo (o primer modo fundamental del estrato de suelo), corresponden a:

$$T_A = \frac{4H_A}{V_{S A}} = 0.44 [s] \quad T_B = \frac{4H_B}{V_{S B}} = 0.11 [s],$$

en los puntos **A** y **B**, respectivamente. En el punto **C**, no existe amplificación ya que no existe un estrato superior.

La forma que adquiere la **Función de Transferencia**, considerando como variable independiente el período  $t_i$ , para los puntos **A** y **B**, se muestra en la figura siguiente:

$$F = \frac{1}{\sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{V_s} \cdot \frac{H}{t_i}\right)\right)^2 + \alpha^2 \cdot \left(\text{sen}\left(\frac{2\pi}{V_s} \cdot \frac{H}{t_i}\right)\right)^2}}$$

