Ejercicio 8

CI42G Dinámica de Estructuras

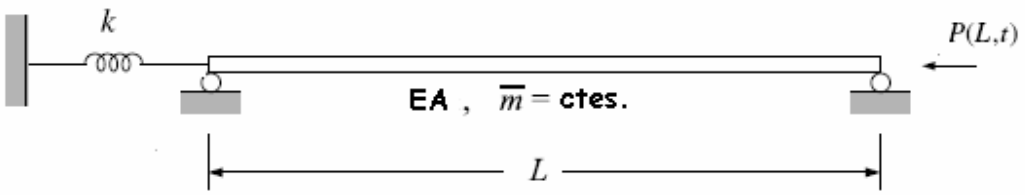
Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.

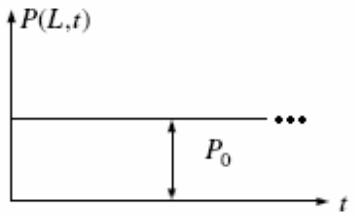
Viernes 9 de Noviembre de 2007

P1. Para la viga que se muestra en la figura, empleando teoría de medios continuos. Determine:

i) Ecuación de movimiento diferencial para un segmento de una viga gobernada por deformación y esfuerzo axial.
ii) Frecuencias angulares naturales (ω_n) y Formas modales de la viga ($\phi_n(x)$).
iii) Fuerza del resorte en el tiempo, para la carga que se muestra en la figura.
iv) Máxima fuerza del resorte en el tiempo.

Desprecie el amortiguamiento del sistema y consideré que la viga esta en reposo en t=0.

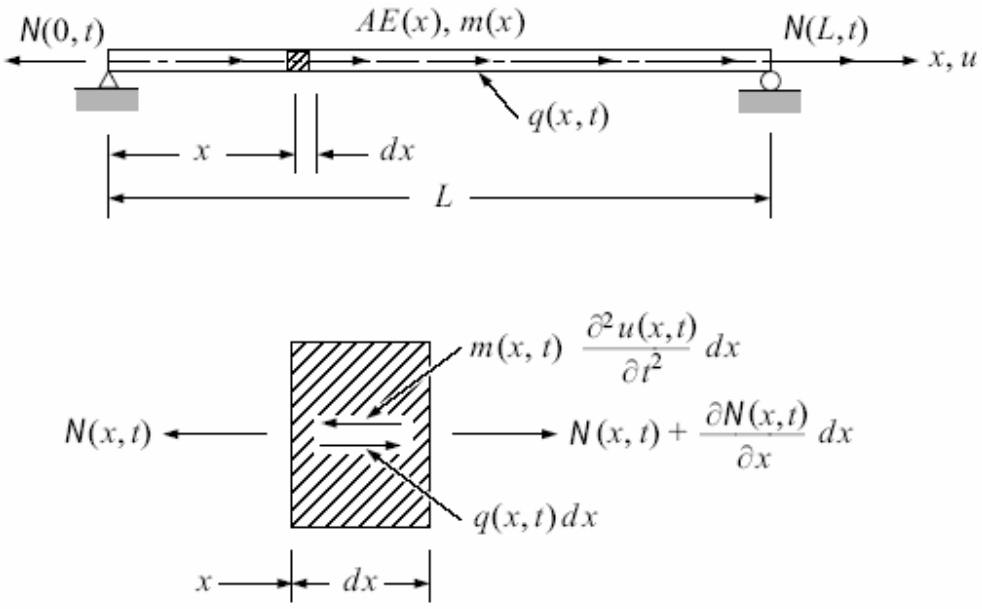




$$u(x,t=0)=0,\ \dot{u}(x,t=0)=0$$

$$k=\frac{EA}{3\cdot L}$$

Solución:



Haciendo sumatoria de Fuerzas horizontales en el segmento de viga:

$$N(x,t)+m(x)\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t}dx-\left[N(x,t)+\frac{\partial N(x,t)}{\partial x}dx\right]-q(x,t)dx=0$$

De la mecánica de sólidos tenemos:

$$N(x,t)=A(x)\cdot\sigma(x,t)=AE(x)\cdot\varepsilon(x,t)=EA(x)\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

De esta forma la Ecuación de movimiento diferencial de una viga es:

$$m(x)\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=q(x,t)$$

En este problema en particular tenemos ($EA(x)=EA$ y $\overline{m}(x)=\overline{m}$), luego la Ec. De movimiento diferencial de un segmento de barra es:

$$\overline{m}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t}-EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}=q(x,t)$$

En este caso particular no hay carga por unidad de largo de este modo $q(x,t)=0$.

Si consideramos el caso homogéneo (sin cargas) ($q(x,t)=0$).

$$\overline{m}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t}-EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}=0$$

Si asumimos que la solución se puede describir en variables separables como:

$$u(x,t)=\underbrace{\phi(x)}_{\substack{Forma\\Modal}}\cdot\underbrace{Y(t)}_{\substack{Desplazamiento\\Modal}}$$

Si reemplazamos esta solución en la ecuación de movimiento diferencial para el caso homogéneo:

$$\overline{m}\cdot\phi(x)\cdot\ddot{Y}(t)-EA\cdot\phi''(x)\cdot Y(t)=0$$

Reordenando la expresión:

$$\underbrace{\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)}}_{\substack{Fnc.\\del\\tiempo}}=\underbrace{\frac{EA}{\overline{m}}\cdot\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}}_{\substack{Fnc.del\\espacio}}=-\omega_n{}^2$$

La parte izquierda de la igualdad es función del tiempo (t), la parte derecha es función del espacio (x), por tanto la única opción es que sean igual a una constante que llamaremos $-\omega_n{}^2$. De esta forma se pueden reescribir en forma independiente las ecuaciones diferenciales que gobiernan al desplazamiento modal y a la forma modal como:

$$\ddot{Y}(t)+\omega_n{}^2\cdot Y(t)=0\quad(clásica\,Ec.de\,mov.de\,1GDL)$$

$$\phi''(x)+\underbrace{\omega_n{}^2\frac{\overline{m}}{EA}}_{\beta^2}\cdot\phi(x)=0$$

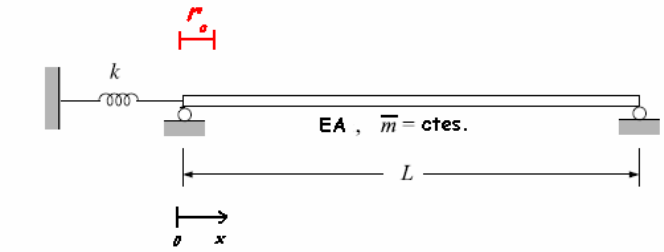
De esta forma la Ec. diferencial que gobierna a la forma modal se puede escribir como:

$$\phi''(x)+\beta^2\cdot\phi(x)=0\qquad Donde\ \beta=\omega_n\sqrt{\frac{\overline{m}}{EA}}\quad ó\quad \omega_n=\beta\sqrt{\frac{EA}{\overline{m}}}$$

Notar que la última expresión es similar a la Ec. de un sistema de un GDL, por tanto su solución será:

$$\phi(x)=A\cdot sen(\beta\cdot x)+B\cdot\cos(\beta\cdot x)$$

Para la viga del sistema se tienen las siguientes condiciones de borde (Notar que estamos en el caso homogéneo):



CB :

$$u(0,t) = r_a(t)$$
$$N(0,t) = k \cdot r_a(t)$$
$$N(L,t) = 0$$

Las condiciones de borde en términos de las formas y desplazamientos modales son:

$$\phi(0) \cdot Y(t) = r_a(t)$$
$$EA \cdot \phi'(0) \cdot Y(t) = k \cdot r_a(t)$$
$$EA \cdot \phi'(L) \cdot Y(t) = 0$$

Reemplazando la primera expresión en la segunda expresión y reemplazando el valor de $k = EA/3 \cdot L$ se obtiene:

$$\phi'(0) \cdot 3 \cdot L = \phi(0)$$
$$\phi'(L) = 0$$

Derivando a $\phi(x)$ se tiene:

$$\phi'(x) = \beta \cdot \left[A \cdot \cos(\beta \cdot x) - B \cdot sen(\beta \cdot x) \right]$$

Evaluando la primera condición:

$$\phi'(0) \cdot 3 \cdot L = \phi(0)$$
$$3 \cdot L \cdot \beta \cdot \left[A \cdot \cos(0) - B \cdot sen(0) \right] = A \cdot sen(0) + B \cdot \cos(0)$$
$$\Rightarrow \qquad B = 3 \cdot L \cdot \beta \cdot A$$

Si evaluamos la segunda condición $\phi'(L) = 0$:

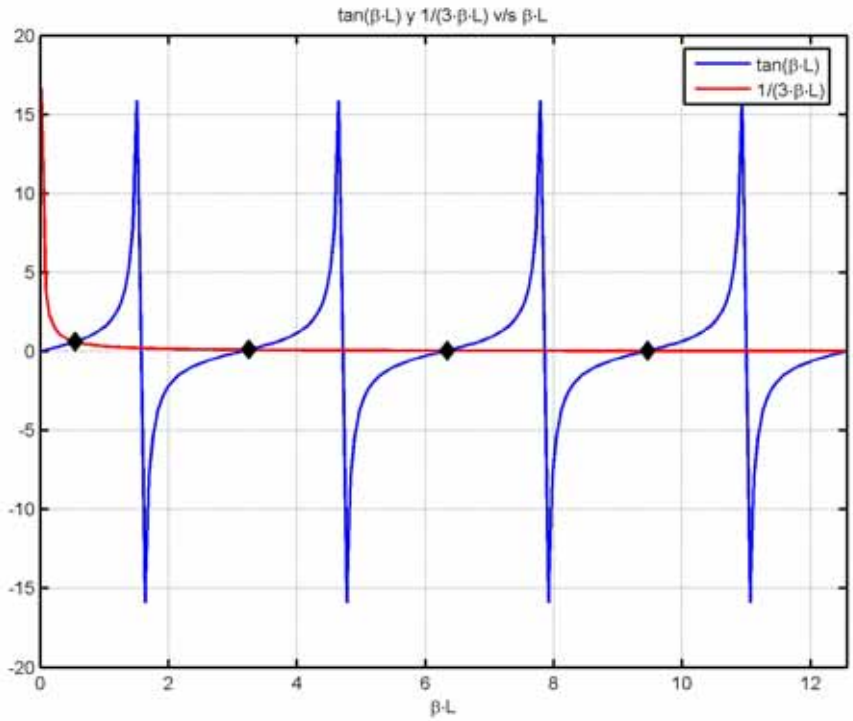
$$\phi'(x) = A \cdot \beta \cdot \left[\cos(\beta \cdot x) - 3 \cdot L \cdot \beta sen(\beta \cdot x) \right]$$
$$\Rightarrow \quad A \cdot \beta \cdot \left[\cos(\beta \cdot L) - 3 \cdot L \cdot \beta \cdot sen(\beta \cdot L) \right] = 0$$

Luego $A \neq 0$ ó sino la solución es nula, por tanto se obtiene una relación para obtener β talque:

$$\left[\cos(\beta \cdot L) - 3 \cdot L \cdot \beta \cdot sen(\beta \cdot L)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3 \cdot L \cdot \beta} = \tan(\beta \cdot L)$$

Si graficamos $\tan(\beta \cdot L)$ y $\frac{1}{3 \cdot L \cdot \beta}$ en función de $\beta \cdot L$, se tendrá a través de la intersección de estas curvas las frecuencias naturales:



Determinación de frecuencias modales.

Los resultados de los primeros modos son respectivamente:

$$\beta_n \cdot L = \begin{Bmatrix} 0.5472 \\ 3.2440 \\ 6.3357 \\ 9.4600 \\ 12.6928 \end{Bmatrix} \quad n = 1...5$$

Notar que cuando $\beta \cdot L \to \infty$. Se puede tener una buena aproximación con:

$$\tan(\beta \cdot L) \approx 0$$

$$\Rightarrow \ \beta_n \approx \frac{\pi \cdot (n-1)}{L} \qquad n = 5...\infty$$

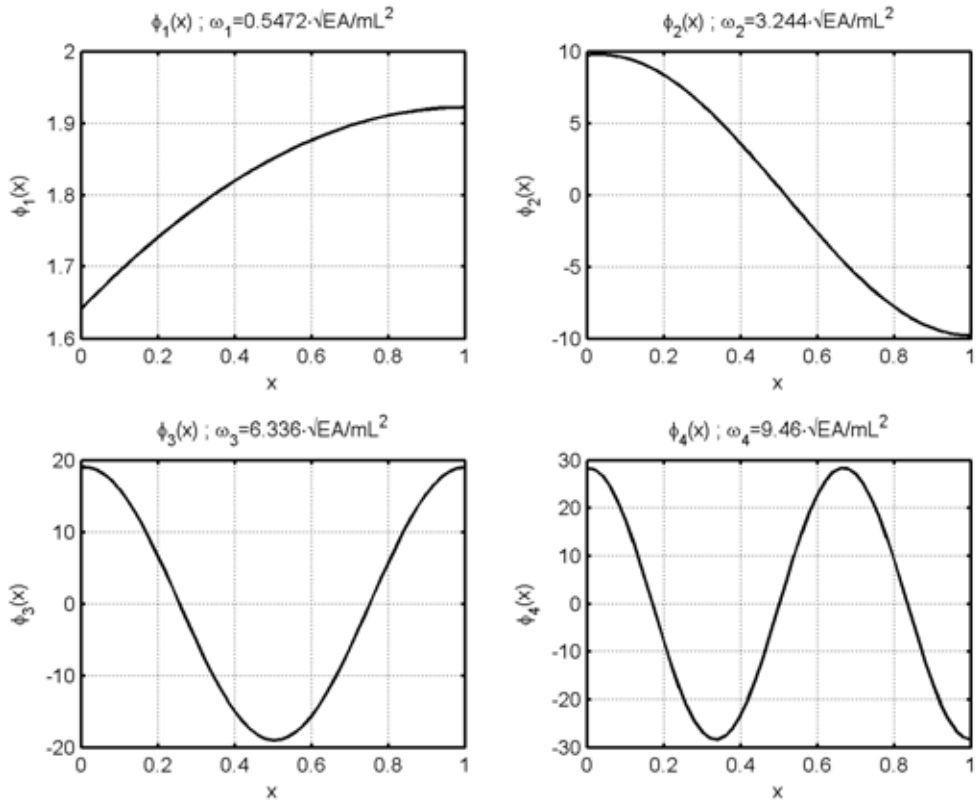
Esta aproximación es bastante buena para el quinto modo $\pi \cdot (5-1) = 4 \cdot \pi = 12.5664$.

De esta forma las frecuencias angulares naturales del sistema son:

$$\omega_n = \begin{Bmatrix} 0.5472 \\ 3.2440 \\ 6.3357 \\ 9.4600 \end{Bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{EA}{\overline{m} \cdot L^2}} \quad n = 1...4 \qquad ; \quad \omega_n \approx \pi \cdot (n-1) \cdot \sqrt{\frac{EA}{\overline{m} \cdot L^2}} \quad n = 5...\infty$$

Las formas modales serán:

$$\phi_n(x) = C_n \cdot \left[sen(\beta_n \cdot x) + 3 \cdot L \cdot \beta_n \cdot \cos(\beta_n \cdot x) \right]$$



Formas modales de la Estructura.

Las masas modales serán:

$$M_{m-n} = \int_0^L \phi_n^{\,2}(x)\cdot m(x)\,dx = \overline{m}\cdot\int_0^L \phi_n^{\,2}(x)\,dx$$

$$= \overline{m}\cdot C_n^{\,2}\cdot\int_0^L \left[sen(\beta_n\cdot x) + 3\cdot L\cdot\beta_n\cos(\beta_n\cdot x)\right]^2 dx$$

$$M_{m-n} = \overline{m}\cdot C_n^{\,2}\cdot\left(\int_0^L sen^2(\beta_n\cdot x)\,dx + 3\cdot L\cdot\beta_n\int_0^L 2\cdot sen(\beta_n\cdot x)\cdot\cos(\beta_n\cdot x)\,dx + (3\cdot L\cdot\beta_n)^2\int_0^L \cos^2(\beta_n\cdot x)\,dx\right)$$

Haciendo un cambio de variables talque $u = \beta_n\cdot x$.

$$M_{m-n} = \frac{\overline{m}\cdot C_n^{\,2}}{\beta_n}\cdot\left(\int_0^{\beta_n\cdot L} sen^2(u)\,du + 3\cdot L\cdot\beta_n\int_0^{\beta_n\cdot L} 2\cdot sen(u)\cdot\cos(u)\,du + (3\cdot L\cdot\beta_n)^2\int_0^{\beta_n\cdot L}\cos^2(u)\,du\right)$$

Empleando las identidades trigonométricas siguientes:

$$sen^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\cdot\alpha)}{2};\ \cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\cdot\alpha)}{2}\ ;\ 2\cdot sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha) = sen(2\cdot\alpha)$$

Se tiene:

$$M_{m-n} = \frac{\overline{m}\cdot C_n^{\,2}}{\beta_n}\cdot\left(\int_0^{\beta_n\cdot L}\frac{1-\cos(2\cdot u)}{2}du + 3\cdot L\cdot\beta_n\int_0^{\beta_n\cdot L} sen(2\cdot u)\,du + (3\cdot L\cdot\beta_n)^2\int_0^{\beta_n\cdot L}\frac{1+\cos(2\cdot u)}{2}du\right)$$

Evaluando las integrales:

$$M_{m-n} = \frac{\overline{m}\cdot C_n^{\,2}}{\beta_n}\cdot\left(\frac{\beta_n\cdot L}{2} - \frac{sen(2\cdot u)}{4}\Big|_0^{\beta_n\cdot L} + 3\cdot L\cdot\beta_n\cdot\frac{-\cos(2\cdot u)}{2}\Big|_0^{\beta_n\cdot L} + (3\cdot L\cdot\beta_n)^2\cdot\left[\frac{\beta_n\cdot L}{2} + \frac{sen(2\cdot u)}{4}\Big|_0^{\beta_n\cdot L}\right]\right)$$

$$\boxed{M_{m-n} = \frac{\overline{m}\cdot C_n^{\,2}}{\beta_n}\cdot\left(2\cdot\beta_n\cdot L + \frac{9\cdot(\beta_n\cdot L)^3}{2} + \frac{\left[(3\cdot\beta_n\cdot L)^2 - 1\right]}{4}\cdot sen(2\cdot\beta_n\cdot L) - \frac{3\cdot\beta_n\cdot L}{2}\cdot\cos(2\cdot\beta_n\cdot L)\right)}$$

$$M_{m-n} = \begin{Bmatrix} 3.34 \\ 49.36 \\ 182.64 \\ 404.71 \end{Bmatrix}\cdot\overline{m}\cdot L\cdot C_n^{\,2}\quad n = 1...4 \qquad ;\ M_{m-n} \approx \overline{m}\cdot L\cdot C_n^{\,2}\cdot\frac{\left(1+9\cdot\pi^2\cdot(n-1)^2\right)}{2}\ \ n = 5...\infty$$

Luego la ecuación que describe el desplazamiento modal es:

$$M_{m-n} \cdot \ddot{Y}_n(t) + \omega^2 \cdot M_{m-n} \cdot Y_n(t) = p_n(t)$$
$$= \phi_n(L) \cdot P(L,t) = -\phi_n(L) \cdot P_0 \quad t > 0$$

Evaluando los desplazamientos modales y velocidades iniciales:

$$Y_n(0) = \frac{\int_0^L \phi(x) \cdot m(x) \cdot v(x,0) dx}{M_{m-n}} = 0 \quad ; \quad \dot{Y}_n(0) = \frac{\int_0^L \phi(x) \cdot m(x) \cdot \dot{v}(x,0) dx}{M_{m-n}} = 0$$

Ahora resolvemos la Ec. diferencial que controla el desplazamiento modal. La solución particular es:

$$Y_{n_p}(t) = \frac{-\phi_n(L) \cdot P_0}{\omega_n{}^2 \cdot M_{m-n}}$$

La solución homogénea es de la forma:

$$Y_{n_h}(t) = A_2 \cdot sen(\omega_n \cdot t) + B_2 \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

Luego la solución total es igual a la suma de la homogénea y la particular:

$$Y_n(t) = A_2 \cdot sen(\omega_n \cdot t) + B_2 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{-\phi_n(L) \cdot P_0}{\omega_n{}^2 \cdot M_{m-n}}$$

Imponiendo las condiciones iniciales es posible determinar A_2 *y* B_2, para ello derivamos para obtener la velocidad modal:

$$\dot{Y}_n(t) = \omega_n \cdot \left[A_2 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) - B_2 \cdot sen(\omega_n \cdot t) \right]$$
$$\Rightarrow \dot{Y}_n(0) = -B_2 \cdot \omega_n = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

Luego:

$$Y_n(0) = B_2 + \frac{-\phi_n(L) \cdot P_0}{\omega_n{}^2 \cdot M_{m-n}} = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{\phi_n(L) \cdot P_0}{\omega_n{}^2 \cdot M_{m-n}}$$

Luego el desplazamiento modal será:

$$Y_n(t) = \frac{-\phi_n(L) \cdot P_0}{\omega_n{}^2 \cdot M_{m-n}} \cdot \left[1 - \cos(\omega_n \cdot t) \right]$$

Luego la solución del desplazamiento será:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \cdot Y_n(t)$$

El esfuerzo del resorte será igual a:

$$F_{res}(t) = -N(0,t) = -EA(x) \cdot \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = -EA \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \phi'(0) \cdot Y_n(t)$$

$$= EA \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi'(0) \cdot \phi_n(L) \cdot P_0}{\omega_n{}^2 \cdot M_{m-n}} \cdot \left[1 - \cos(\omega_n \cdot t)\right]$$

Donde:

$$\phi'(0) = C_n \cdot \beta_n$$
$$\phi_n(L) = C_n \cdot \left[sen(\beta_n \cdot L) + 3 \cdot L \cdot \beta_n \cdot \cos(\beta_n \cdot L)\right]$$

ω_n y M_{m-n} fueron determinados anteriormente:

Como la carga dura hasta el infinito la máxima fuerza del resorte será:

$$F_{res-\max} = EA \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left|\frac{\phi'(0) \cdot \phi_n(L) \cdot P_0}{\omega_n{}^2 \cdot M_{m-n}}\right|$$

La contribución a la fuerza máxima por modo es entonces:

$$F_{res-\max-n} = \begin{Bmatrix} 2.099 \\ 0.122 \\ 0.033 \\ 0.015 \end{Bmatrix} \cdot P_0 \quad n = 1...4 \qquad ; \; F_{res-\max-n} \approx P_0 \frac{12}{\left(1 + 9 \cdot \pi^2 \cdot (n-1)^2\right)} \quad n = 5...\infty$$

$$F_{res-max} \rightarrow 2.307 \cdot P_0$$