Ejercicio 7

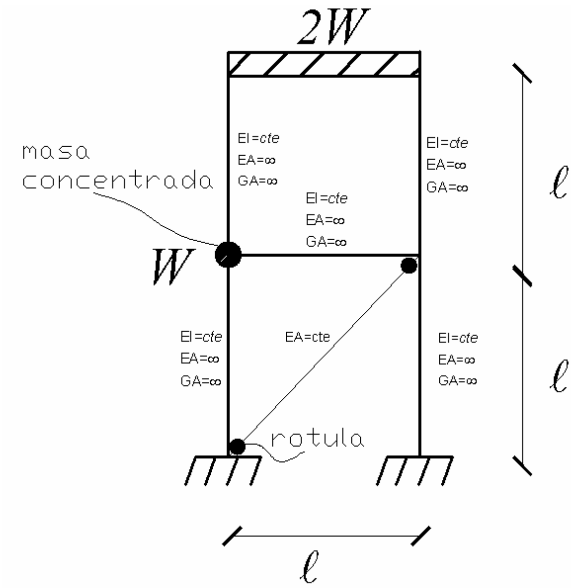
CI42G Dinámica de Estructuras

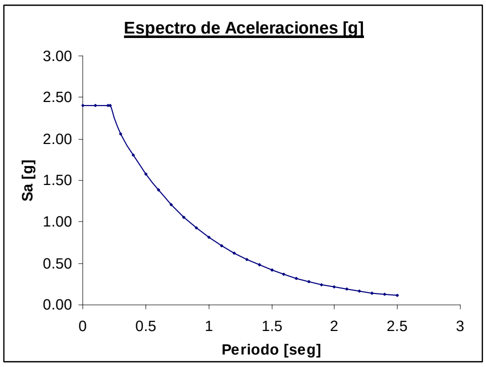
Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.

Aux: Francisco Hernández Prado.

Viernes 26 de Octubre de 2006

P1. Para la estructura que se muestra en la figura, determine el máximo esfuerzo axial de la biela. Si la estructura es excitada por un sismo horizontal en la base que puede ser descrito por el espectro de aceleraciones que se muestra. En sus pasos intermedios debe normalizar con respecto a la masa modal ($[M_m]=[I]$).





$W = 500\,kgf$

$g = 9.8\,m/s^2$

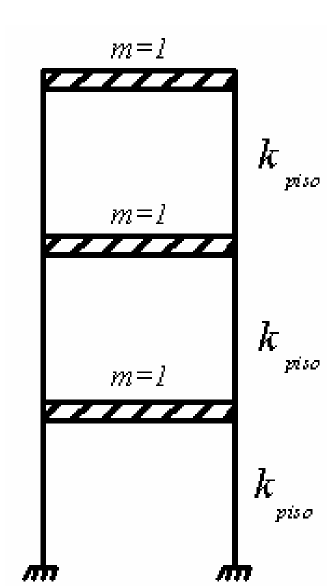
$\ell = 2m$

$EI = 1000\,kfg \cdot m^2$

$EA = 8000\,kgf$

$$Sa = \begin{cases} 2{,}4g & si\ 0 \le T \le 0{,}22seg \\ 3{,}071g \times e^{-1.33 \cdot T} & si\ 0{,}22seg < T \end{cases}$$

P2. Para el edificio simplificado que se muestra en la figura:



1. Ajuste la rigidez de piso (k_{piso}) de manera que el segundo período sea 0.5 seg. (T_2=0,5 seg).
2. Determine la razón de amortiguamiento del segundo modo β_2 dado que β_1=1% y β_3=5% (Rayleigh).
3. Determine la respuesta del piso superior en el tiempo, si se da una condición de velocidad inicial a la estructura de 0.5 en el piso superior y nula para el primer y segundo piso ($\dot{v}_0 = \{0.5\ \ 0.0\ \ 0.0\}^T$).

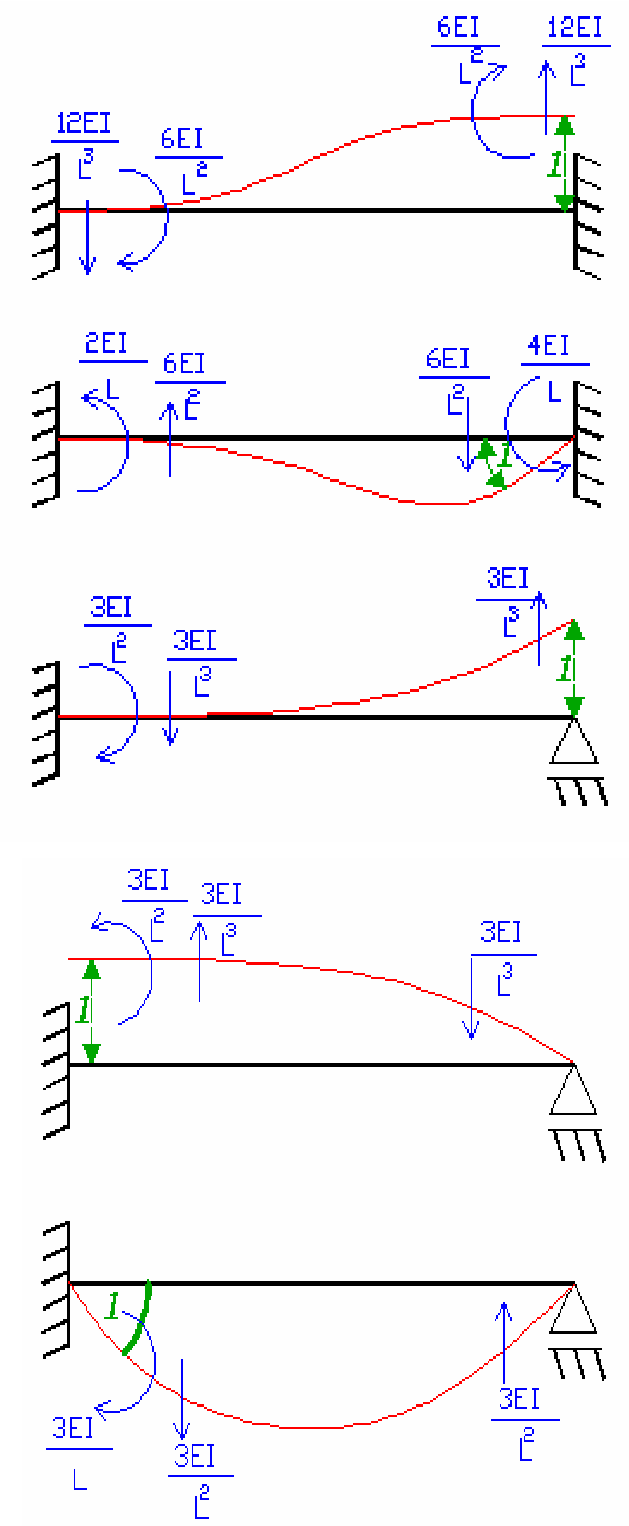
Debe trabajar con las formas modales normalizadas por la matriz de masa modal (en ambos problemas)

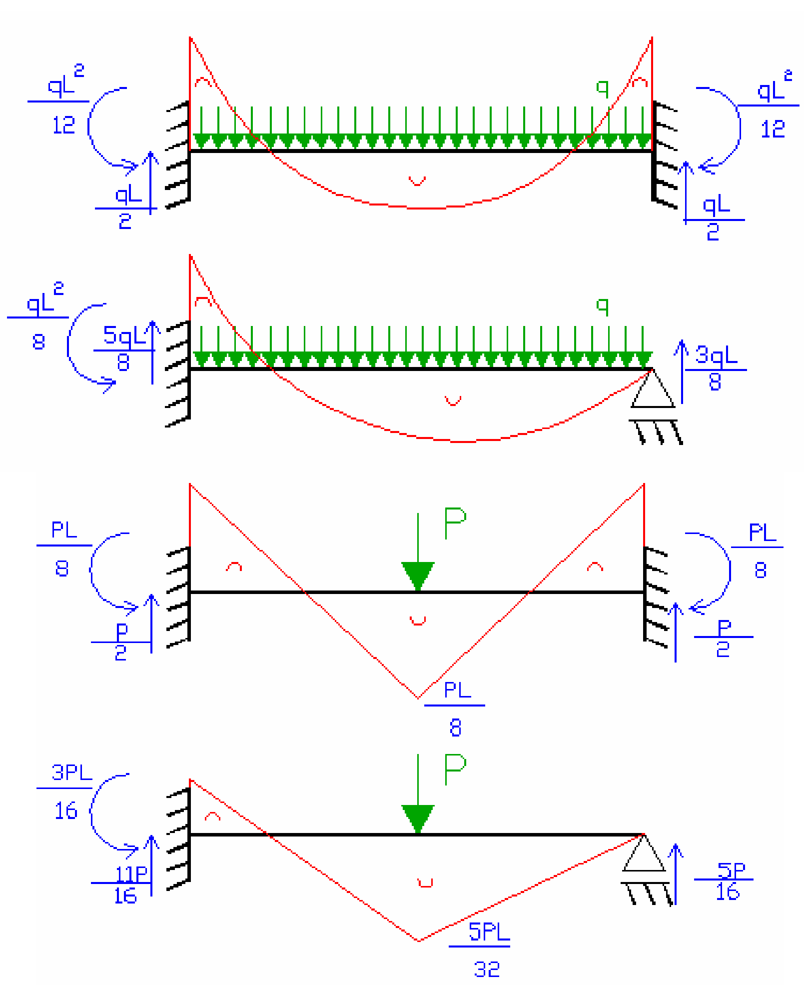
Tabla Básica de Rigidez

CI42G Dinámica de Estructuras

Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.

Aux: Francisco Hernández Prado.





	Tipo de Simetría					
	Plana		Axial		Puntual	
	S	A	S	A	S	A
Nx	?	0	?	0	?	0
Ny	0	?	0	?	?	0
Nz	0	?	?	0	?	0
Mx	0	?	?	0	0	?
My	?	0	0	?	0	?
Mz	?	0	?	0	0	?

$ORIGIN \equiv 1 \quad i := 1..2 \quad j := 1..2$

PAUTA EJERCICIO 7 CI42G PRIMAVERA 2007

P1 :

Datos :

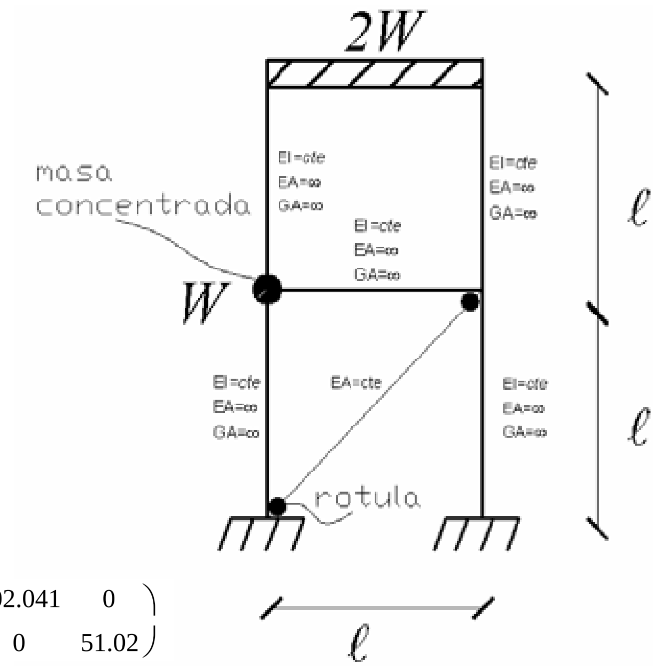
$W := 500$

$g := 9.8$

$L := 2$

$EA := 8000$

$EI := 1000$



Matriz de masa y Rigidez

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{W}{g} \qquad M = \begin{pmatrix} 102.041 & 0 \\ 0 & 51.02 \end{pmatrix}$$

$$K1 := \begin{pmatrix} \frac{24 \cdot EI}{L^3} & \frac{-24 \cdot EI}{L^3} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ \frac{-24 \cdot EI}{L^3} & \frac{48 \cdot EI}{L^3} + \frac{EA}{2\sqrt{2} \cdot L} & 0 & 0 \\ \frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI}{L} & \frac{2 \cdot EI}{L} \\ \frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & \frac{2 \cdot EI}{L} & \frac{12 \cdot EI}{L} \end{pmatrix} \qquad K1 = \begin{pmatrix} 3000 & -3000 & 1500 & 1500 \\ -3000 & 7414 & 0 & 0 \\ 1500 & 0 & 6000 & 1000 \\ 1500 & 0 & 1000 & 6000 \end{pmatrix}$$

$$Kaa_{i,j} := K1_{i,j} \qquad Kap_{i,j} := K1_{i,j+2} \qquad Kpa := Kap^T \qquad Kpp_{i,j} := K1_{i+2,j+2}$$

$$Kaa = \begin{pmatrix} 3000 & -3000 \\ -3000 & 7414 \end{pmatrix} \qquad Kap = \begin{pmatrix} 1500 & 1500 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Kpp = \begin{pmatrix} 6000 & 1000 \\ 1000 & 6000 \end{pmatrix}$$

$$K := Kaa - Kap \cdot Kpp^{-1} \cdot Kpa \qquad K = \begin{pmatrix} 2357 & -3000 \\ -3000 & 7414 \end{pmatrix}$$ Matriz de rigidez condensada

$$w2 := \text{eigenvals}\left(M^{-1} \cdot K\right)$$

$$w2 = \begin{pmatrix} 10.29674 \\ 158.12185 \end{pmatrix} \qquad \omega := \sqrt{w2} \qquad \omega = \begin{pmatrix} 3.209 \\ 12.575 \end{pmatrix} \qquad T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \qquad T = \begin{pmatrix} 1.958 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Phi := \text{eigenvecs}\left(M^{-1} \cdot K\right) \qquad \Phi = \begin{pmatrix} -0.917 & 0.213 \\ -0.399 & -0.977 \end{pmatrix}$$

Normalizando modos por la matriz de masa

$$Mm := \Phi^{T} \cdot M \cdot \Phi \qquad Mm = \begin{pmatrix} 93.9 & 0 \\ 0 & 53.3 \end{pmatrix}$$

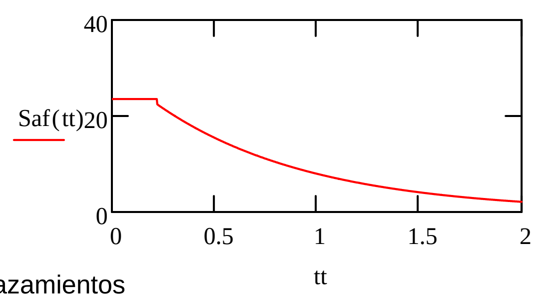
$$\Phi_{i,j} := \frac{\Phi_{i,j}}{\sqrt{Mm_{j,j}}} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} -0.0946 & 0.0291 \\ -0.0412 & -0.1338 \end{pmatrix}$$ forma modal normalizada

La masa modal es unitaria y la rigidez modal es igual a w2, con esta normalizacion

Factor de Participacion Modal:

$$r := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Lm := \Phi^{T} \cdot M \cdot r \qquad Lm = \begin{pmatrix} -11.756 \\ -3.854 \end{pmatrix}$$ factor de participacion modal

$$\text{Saf}(Tn) := \begin{cases} 2.4 \cdot 9.8 & \text{if } 0 \le Tn \le 0.22 \\ 3.071 \cdot 9.8 \cdot e^{-1.33 \cdot Tn} & \text{if } Tn > 0.22 \end{cases}$$



$$Sa_i := \text{Saf}\left(T_i\right) \qquad Sa = \begin{pmatrix} 2.226 \\ 15.484 \end{pmatrix}$$

$$Ymax_i := \frac{Lm_i \cdot Sa_i}{\left(\omega_i\right)^2} \qquad Ymax = \begin{pmatrix} -2.541 \\ -0.377 \end{pmatrix}$$ Desplazamientos modales máximos

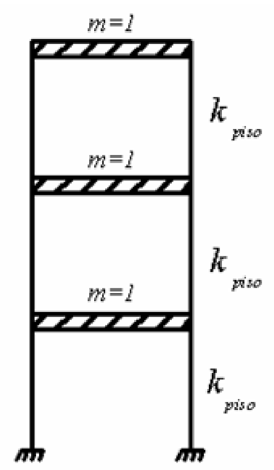
$$v1max := \sqrt{\sum_{t=1}^{2} \left(\Phi_{1,t} \cdot Ymax_t\right)^2} \qquad v1max = 0.241$$ Desplazamiento Máximo Piso Inferior

$$Nmax := \frac{v1max \cdot EA}{2L} \qquad Nmax = 481.385$$

PAUTA EJERCICIO 7 CI42G PRIMAVERA 2007 ORIGIN ≡ 1

P2 : $i := 1..3 \quad j := 1..3$

P2. Para el edificio simplificado que se muestra en la figura:



1. Ajuste la rigidez de piso (k_{piso}) de manera que el segundo período sea 0.5 seg. (T_2=0,5 seg).
2. Determine la razón de amortiguamiento del segundo modo β_2 dado que β_1=1% y β_3=5% (Rayleigh).
3. Determine la respuesta del piso superior en el tiempo, si se da una condición de velocidad inicial a la estructura de 0.5 en el piso superior y nula para el primer y segundo piso ($\dot{v}_0 = \{0.5 \;\; 0.0 \;\; 0.0\}^T$).

Debe trabajar con las formas modales normalizadas por la matriz de masa modal (en ambos problemas)

Datos :

$$\beta_1 := 0.01 \quad \beta_3 := 0.05 \quad T_2 := 0.5 \quad v_0 := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de masa y Rigidez

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \omega 2 := \text{eigenvals}\left(M^{-1} \cdot K1\right)$$

$$\omega 2 = \begin{pmatrix} 0.19806 \\ 1.55496 \\ 3.24698 \end{pmatrix} \quad k := \left(\frac{2\cdot\pi}{T_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega 2_2} \quad k = 101.555$$

Rigidez de piso para que T2 sea 0.5 seg

$$\omega := \sqrt{\omega 2 \cdot k} \quad \omega = \begin{pmatrix} 4.485 \\ 12.566 \\ 18.159 \end{pmatrix} \quad T := \frac{2\cdot\pi}{\omega} \quad T = \begin{pmatrix} 1.401 \\ 0.500 \\ 0.346 \end{pmatrix}$$

$$\Phi := \text{eigenvecs}\left(M^{-1} \cdot K1\right) \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0.737 & -0.591 & 0.328 \\ 0.591 & 0.328 & -0.737 \\ 0.328 & 0.737 & 0.591 \end{pmatrix}$$

Motar que la forma es indepndiente del factor de escala de la matriz de rigidez

Normalizando modos por la matriz de masa

$$Mm := \Phi^T \cdot M \cdot \Phi \qquad Mm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que por coincidencia y estaba normalizado

$$\Phi_{i,j} := \frac{\Phi_{i,j}}{\sqrt{Mm_{j,j}}} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0.737 & -0.591 & 0.328 \\ 0.591 & 0.328 & -0.737 \\ 0.328 & 0.737 & 0.591 \end{pmatrix}$$

forma modal normalizada, queda igual

La masa modal es unitaria y la rigidez modal es igual a w2, con esta normalizacion

Rayleigh:

$$Mray := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_3} & \omega_3 \end{pmatrix} \qquad ctes := Mray^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \qquad ctes = \begin{pmatrix} -0.0224 \\ 0.0056 \end{pmatrix}$$

Luego se pueden determinar los amortiguamientos modales

$$\beta := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \\ \frac{1}{\omega_3} & \omega_3 \end{pmatrix} \cdot ctes \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 3.414 \\ 5.000 \end{pmatrix} \%$$

Velocidad Inicial Modal

$$Vn_0 := \Phi^T \cdot M \cdot v_0 \qquad Vn_0 = \begin{pmatrix} 0.368 \\ -0.296 \\ 0.164 \end{pmatrix}$$

velocidad modal inicial

$$\omega d_i := \omega_i \cdot \sqrt{1 - (\beta_i)^2} \qquad \omega d = \begin{pmatrix} 4.485 \\ 12.559 \\ 18.136 \end{pmatrix} \qquad \omega = \begin{pmatrix} 4.485 \\ 12.566 \\ 18.159 \end{pmatrix}$$

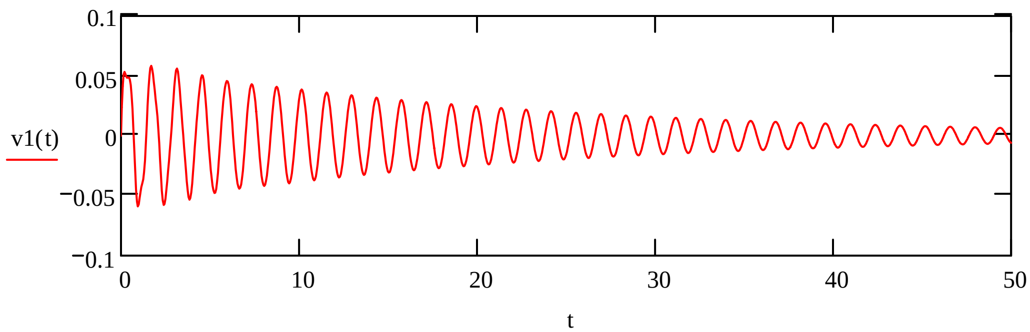
$$Am_i := \frac{Vn_{0_i}}{\omega d_i} \qquad Am = \begin{pmatrix} 0.082 \\ -0.024 \\ 0.009 \end{pmatrix}$$

Amplitud máxima modal

$$Ar1_i := \Phi_{1,i} \cdot Am_i \qquad Ar1 = \begin{pmatrix} 0.0606 \\ 0.0139 \\ 0.0030 \end{pmatrix}$$

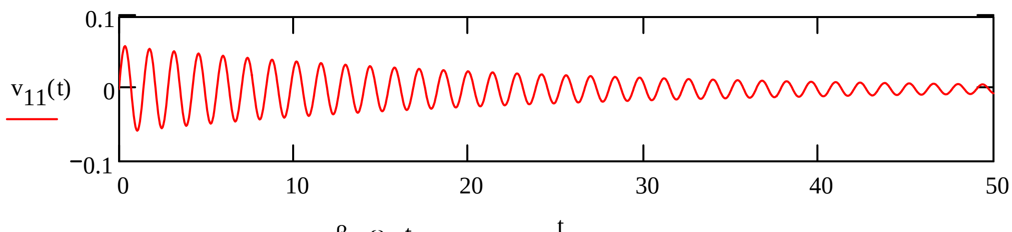
v1= 0.0606 x sen(4.485 x t) x exp(-0.01 x 4.485 x t)+...
+ 0.0139 x sen(12.559 x t) x exp(-0.034 x12.566x t)+... (solucion)
+ 0.0030 x sen(18.136 x t) x exp(-0.05 x 18.159 x t)

$$v1(t) := \sum_{n=1}^{3} \left(Ar1_n \cdot \sin\left(\omega d_n \cdot t\right) \cdot e^{-\beta_n \cdot \omega_n \cdot t} \right)$$

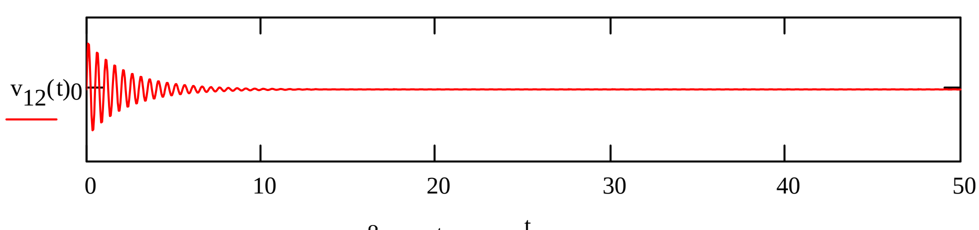


ANALIZANDO LA RESPUESTA POR MODO:

$$v_{11}(t) := Ar1_1 \cdot \sin\left(\omega d_1 \cdot t\right) \cdot e^{-\beta_1 \cdot \omega_1 \cdot t}$$



$$v_{12}(t) := Ar1_2 \cdot \sin\left(\omega d_2 \cdot t\right) \cdot e^{-\beta_2 \cdot \omega_2 \cdot t}$$



$$v_{13}(t) := Ar1_3 \cdot \sin\left(\omega d_3 \cdot t\right) \cdot e^{-\beta_3 \cdot \omega_3 \cdot t}$$