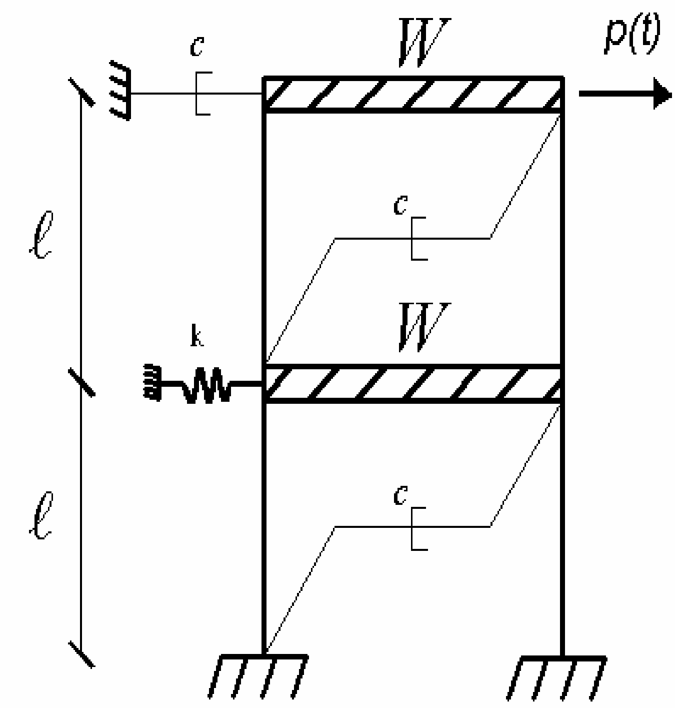
Ejercicio 6
CI42G Dinámica de Estructuras
Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.

Viernes 5 de Octubre de 2007

P1. Para la estructura que se muestra en la figura, determine:

1. Matriz de Masa ($[M]$), Matriz de Rigidez ($[K]$) y Matriz de amortiguamiento ($[C]$). (por generación directa).
2. Formas modales ($[\phi]$) normalizadas a uno (1) en piso superior, frecuencias angulares ($\{\omega\}$) y períodos ($\{T\}$).
3. La respuesta de cada GDL para cada modo en forma independiente, para el impacto de corta duración en el piso superior que se muestra en la figura. Asuma en este caso que los amortiguadores imponen una razón de amortiguamiento ($\{\beta\}$) de 5% y 3% en el primer y segundo modo.
4. Determine las masas modales ($[M_m]$) y las rigideces modales ($[K_m]$).
5. El diagrama de momentos máximo de la estructura para cada modo en forma independiente.



$EI = 1000\ kgf \cdot m^2$

$EA = \infty$

$GA = \infty$

$W = 600\ kgf$

$g = 9.8\ m/s^2$

$\overline{m} = 0$

$\ell = 2.5\ m$

$k = 800\ kgf/m$

$c = 50\ kgf \cdot s/m$

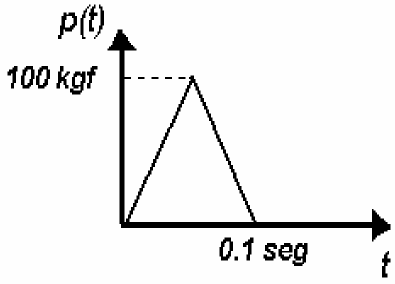
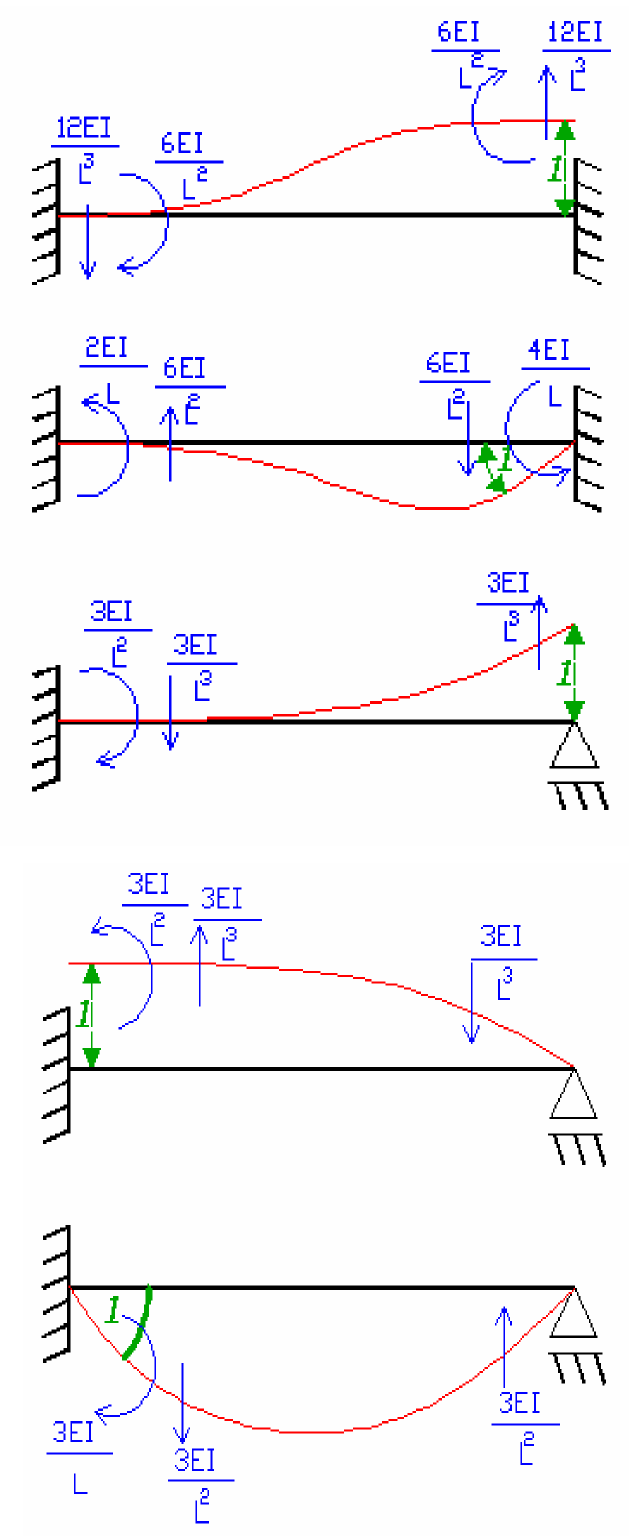


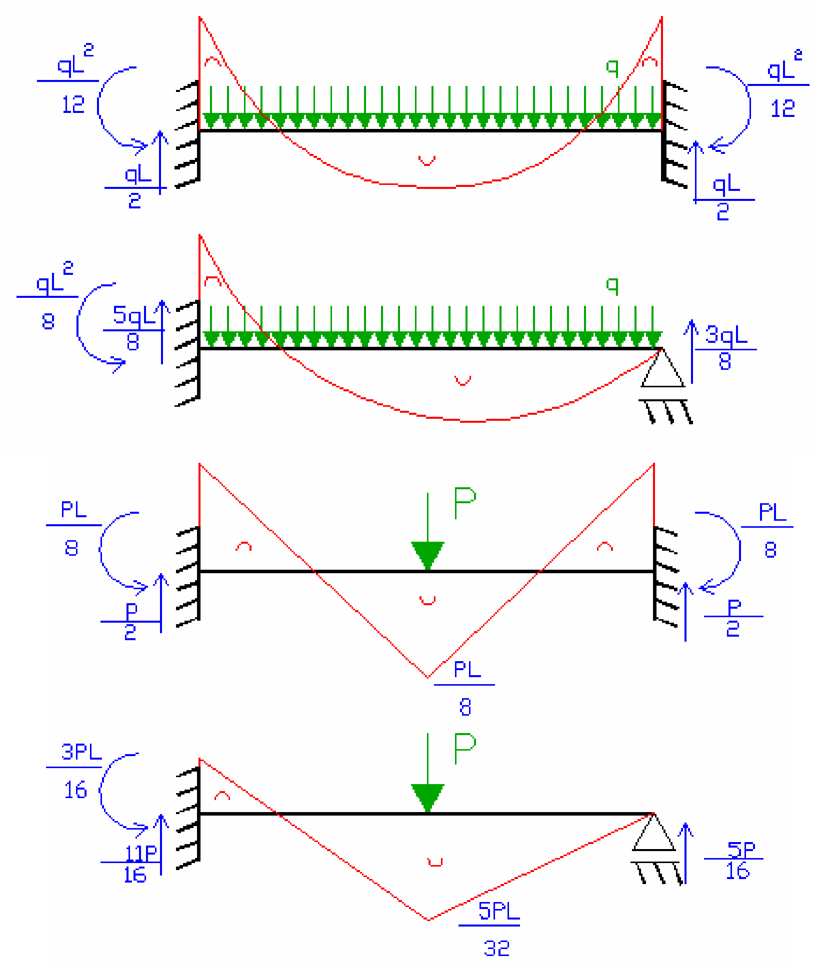
Tabla Básica de Rigidez

CI42G Dinámica de Estructuras

Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.

Aux: Francisco Hernández Prado.





Tipo de Simetría						
	Plana		Axial		Puntual	
	S	A	S	A	S	A
Nx	?	0	?	0	?	0
Ny	0	?	0	?	?	0
Nz	0	?	?	0	?	0
Mx	0	?	?	0	0	?
My	?	0	0	?	0	?
Mz	?	0	?	0	0	?

1) [M], [K], [C].

$$[M] = \begin{bmatrix} W/g & 0 \\ 0 & W/g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61,225 & 0 \\ 0 & 61,225 \end{bmatrix} \frac{kgf\, s^2}{m}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 24EI/\ell^3 & -\frac{24EI}{\ell^3} \\ -24EI/\ell^3 & 48EI/\ell^3 + k_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1536 & -1536 \\ -1536 & 3872 \end{bmatrix} \frac{kgf}{m}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -50 \\ -50 & 100 \end{bmatrix} \frac{kgf \cdot s}{m}$$

1,0

2) $[\phi]$, $\{\omega\}$, $\{T\}$.

1,0

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,496 & -2,016 \end{bmatrix} \qquad \omega = \begin{pmatrix} 3,56 \\ 8,70 \end{pmatrix} \frac{rad}{seg} \qquad T = \begin{pmatrix} 1,767 \\ 0,722 \end{pmatrix} seg.$$

3) $[M_m]$, $[K_m]$.

1,0

$$[M_m] = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} 76,28 & 0 \\ 0 & 310,23 \end{bmatrix} \frac{kgf \cdot s^2}{m}$$

$$[K_m] = [\phi]^T [K][\Phi] = \begin{bmatrix} 965 & 0 \\ 0 & 23480 \end{bmatrix} \frac{kgf}{m}$$

4) Respuesta a impacto.

<u>NOTA</u>: $[M]\{\ddot{v}(t)\} + [C]\{\dot{v}(t)\} + [K]\{v(t)\} = \{P(t)\}$. ec. de movimiento.

Si $v(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formas modales}}}{[\Phi]} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vector de desplazamientos modales}}}{\{Y(t)\}} = \sum_{i=1}^{N} \{\phi_i\} Y_i(t)$ (*)

N: n° de modos. En general igual al n° de GDL.

Donde $[\Phi] = [\{\phi_1\}\{\phi_2\} \dots \{\phi_n\}]$ y $\{Y(t)\} = \begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_m(t) \end{Bmatrix}$

· Reemplazando (*) y premultiplicando por $[\phi]^T$

$$[\phi]^T[M][\phi]\{\ddot{Y}(t)\} + [\phi]^T[K][\phi]\{Y(t)\} + [\phi]^T[C][\phi]\{\dot{Y}(t)\} = [\phi]^T \cdot \{P(t)\}. \quad (**)$$

En caso de escoger una base ortogonal, como la obtenida con valores y vectores propios $\Rightarrow$ $[M_m] = [\phi]^T[M][\phi]$ con $\{\phi_j\}^T[M]\{\phi_i\} = \begin{cases} M_{mi} & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$[K_{mi}] = [\phi]^T[K][\phi]$ con $\{\phi_j\}^T[K]\{\phi_i\} = \begin{cases} K_{mi} & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Masas y rigideces modales, diagonales

* En un caso clásico se puede asumir de igual forma que $[C_m] = [\phi]^T[C][\phi]$ es diagonal.

De esta forma (**) queda:

$$[M_m]\{\ddot{Y}(t)\} + [K_{mi}]\{Y(t)\} + [C_{mi}]\{\dot{Y}(t)\} = \{p_m(t)\} = [\phi]^T \{P(t)\}$$

ec. de movimiento en coordenadas modales. (***)

Como $[K_m]$, $[M_m]$ y $[C_m]$ son diagonales la ec. (***) puede ser entendida como N ec. de 1GDL desacoplables. (Se toma cada fila por separado).

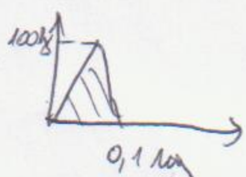
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} M_{m_1}\ddot{Y}_1(t) + C_{m_1}\dot{Y}_1(t) + K_{m_1}Y_1(t) = p_{m_1}(t) \\ M_{m_2}\ddot{Y}_2(t) + C_{m_2}\dot{Y}_2(t) + K_{m_2}Y_2(t) = p_{m_2}(t) \\ \vdots \\ M_{m_N}\ddot{Y}_N(t) + C_{m_N}\dot{Y}_N(t) + K_{m_N}Y_N(t) = p_{m_N}(t). \end{array}\right\} \text{N ec de 1GDL independientes}$$

- Volviendo al problema: $\{p_m(t)\} = [\phi]^T \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{P(t)\}} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ p(t) \end{Bmatrix}.$

por otra parte $C_{m_i} = 2\beta_i M_{m_i} w_i$

$\Rightarrow M_{m_i}\ddot{Y}_i(t) + 2\beta_i M_{m_i} w_i \dot{Y}_i(t) + K_{m_i} Y_i(t) = p_{m_i}(t)$ ec. modal de 1GDL.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 76{,}28\,\ddot{Y}_1(t) + 2\cdot 0{,}05\cdot 76{,}28\cdot 3{,}56\,\dot{Y}_1(t) + 965\,Y_1(t) = p(t) \\ 310{,}23\,\ddot{Y}_2(t) + 2\cdot 0{,}03\cdot 310{,}23\cdot 8{,}70\,\dot{Y}_2(t) + 23480\,Y_2(t) = p(t) \end{array} \quad \text{ec. modales.}$$

En este caso $p(t) =$ 

impacto... si $\frac{t_d}{T} < 0{,}25$ se puede usar impacto de corta duración.

$\frac{t_d}{T_1} = \frac{0{,}1\,seg}{1{,}767\,seg} = 0{,}056 < 0{,}25$ ✓ok

$\frac{t_d}{T_2} = \frac{0{,}1\,seg}{0{,}722\,seg} = 0{,}1385 < 0{,}25$ ok ✓

$$\Rightarrow \dot{Y}_{i0} = \frac{1}{M_{m_i}} \left[\int_0^{td} p_{m_i}(t)\, dt \right]$$ (velocidad inicial por modo).

$$\dot{Y}_{i0} = \frac{1}{M_{m_i}} \times \frac{0,1\ seg \cdot 100\ kgf}{2} = \begin{pmatrix} 0,0655 \\ 0,0161 \end{pmatrix} \frac{m}{seg.}$$

$$\Rightarrow Y_i(t) = \frac{\dot{Y}_{i0}}{w_{D_i}} e^{-\beta_i w_i t} \operatorname{sen}(wd_i\, t)$$

$$wd_i = w_i \sqrt{1-\beta_i^2} = \begin{pmatrix} 3,55 \\ 8,70 \end{pmatrix} \frac{rad}{seg}$$

$$\Rightarrow Y_1(t) = 0,0185\ e^{-0,1778\, t} \operatorname{sen}(3,552\, t) \quad [m]$$

$$Y_2(t) = 0,0019\ e^{-0,2610\, t} \operatorname{sen}(8,696\, t) \quad [m].$$

Respuesta 1er Modo:

$$\underset{1\ modo}{v_1(t)} = \{\phi_1\} \cdot Y_1(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,496 \end{Bmatrix} \cdot Y_1(t) = \begin{pmatrix} 0,0257 \\ 0,0105 \end{pmatrix} \cdot e^{-0,1778\, t} \operatorname{sen}(3,552 t)$$

$$\underset{1\ modo}{v_2(t)} = \{\phi_2\}\, Y_2(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,02 \end{Bmatrix} \cdot Y_2(t) = \begin{pmatrix} 0,0019 \\ -0,0037 \end{pmatrix} \cdot e^{-0,2610} \operatorname{sen}(8,696 t)$$

1,0

* Diagrama de momentos por modos:

1er Modo) El máximo desplazamiento modal se cumple cuando.

$$\operatorname{sen}(wd_1\, t_{max_1}) = 1 \Rightarrow wd_1\, t_{max_1} = \pi/2 \Rightarrow t_{max_1} = \frac{\pi}{2 wd_1} = 0,4422\ seg.$$

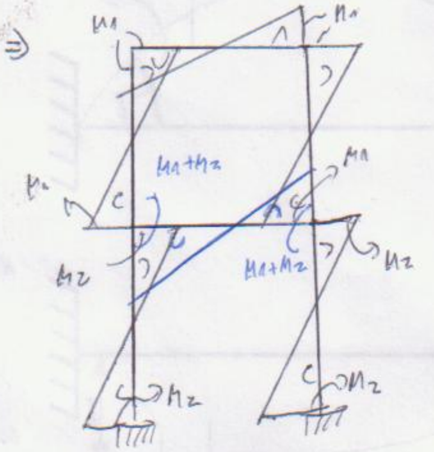
$$Y_{1max} = 0,0185 \cdot e^{-0,1778 \cdot 0,4422} = 0,0171\,[m].$$

$$\Rightarrow v_{1\,max} = \begin{pmatrix} 0{,}0171 \\ 0{,}0085 \end{pmatrix} (m) \;\Rightarrow\; v_{\substack{rel \\ 1}} = \begin{pmatrix} 0{,}0086 \\ 0{,}0085 \end{pmatrix} [m].$$

$(\phi_1 \cdot Y_{1\,max})$

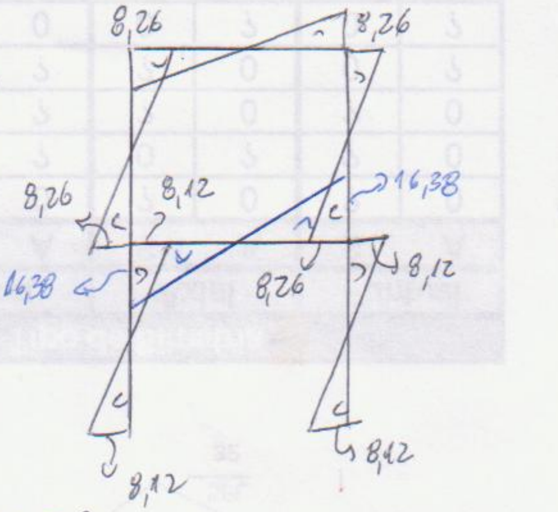
x kgf·m.

$\Rightarrow$



$$M_1 = \frac{6EI}{L^2} \times 0{,}0086 = 8{,}26 \text{ kgf}\cdot m$$

$$M_2 = \frac{6EI}{L^2} \times 0{,}0085 = 8{,}12 \text{ kgf}\cdot m$$



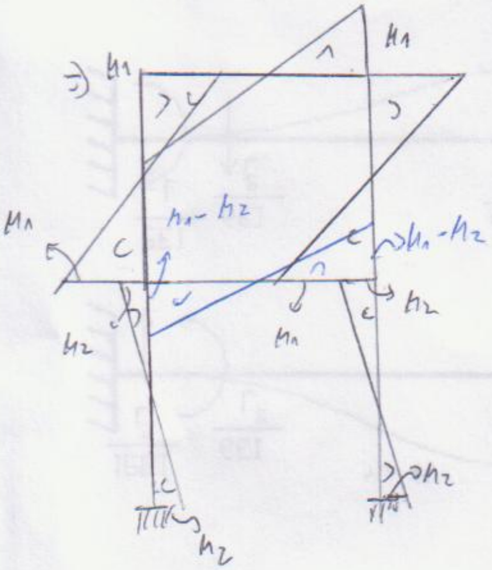
2do Modo) El máximo desplazamiento modal ocurre cuando: $t_{max2} = \dfrac{\pi}{2\omega_{D2}} = 0{,}1806 \text{ seg}.$

$$\Rightarrow Y_{2\,max} = 0{,}0019 \cdot e^{-0{,}2610 \times 0{,}1806} = 0{,}0018 \; m$$

$$v_{2\,max} = \begin{pmatrix} 0{,}0018 \\ -0{,}0036 \end{pmatrix} (m) \;\Rightarrow\; v_{2\,rel} = \begin{pmatrix} 0{,}0053 \\ -0{,}0036 \end{pmatrix} (m)$$

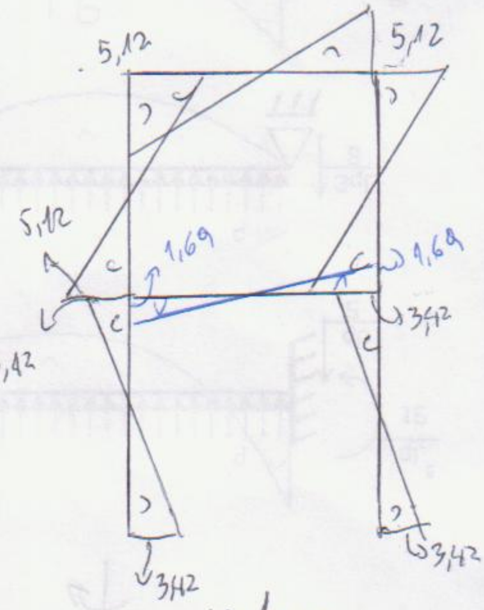
(1,0)

$\Rightarrow$



$$M_1 = \frac{6EI}{L^2} \times 0{,}0053\,m = 5{,}12 \text{ kgf}\cdot m$$

$$M_2 = \frac{6EI}{l^2} \times 0{,}0036 = 3{,}42 \text{ kgf}\cdot m$$



x kgf·m

NOTA: La respuesta máxima total no es la suma de los máximos de cada modo

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0{,}0257 \\ 0{,}0405 \end{pmatrix} e^{-0{,}1778\,t} \operatorname{sen}(3{,}552\,t) + \begin{pmatrix} 0{,}0019 \\ -0{,}0037 \end{pmatrix} \cdot e^{-0{,}2610\,t} \operatorname{sen}(8{,}696\,t)$$

$\hookrightarrow$ Esto tb. puede ser maximizado, pero es más tedioso.