Ejercicio 5

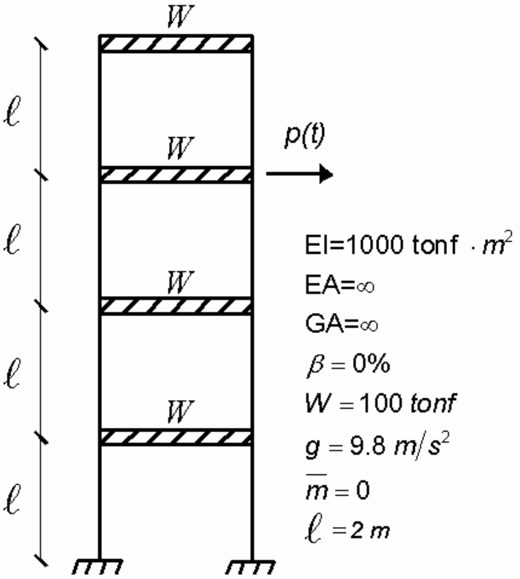
CI42G Dinámica de Estructuras

Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.

Aux: Francisco Hernández Prado.

Viernes 28 de Septiembre de 2007

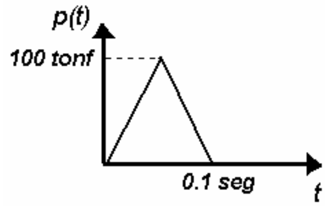
P1. Para el edificio de masas concentradas que se muestra en la figura se han propuesto dos formas modales. (ϕ_1 y ϕ_2).



i) Determine las masas y rigideces generalizadas de la estructura ($m*$ y $k*$). Para las dos formas modales propuestas. Luego concluya cual representaría de mejor forma la vibración de la estructura.

ii) A partir de la forma modal escogida, determine el máximo momento de las columnas de la estructura para el impacto en el 3er piso mostrado. (**Hint:** Asuma que el sistema se puede generalizar como un sistema de 1 GDL).

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.25 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.90 \\ 0.65 \\ 0.35 \end{Bmatrix}$$



P2. Para la estructura que se muestra en la figura. Determine la masa y la rigidez generalizada. Además determine el período fundamental. (**Hint:** La estructura se puede condensar al GDL que se indica).

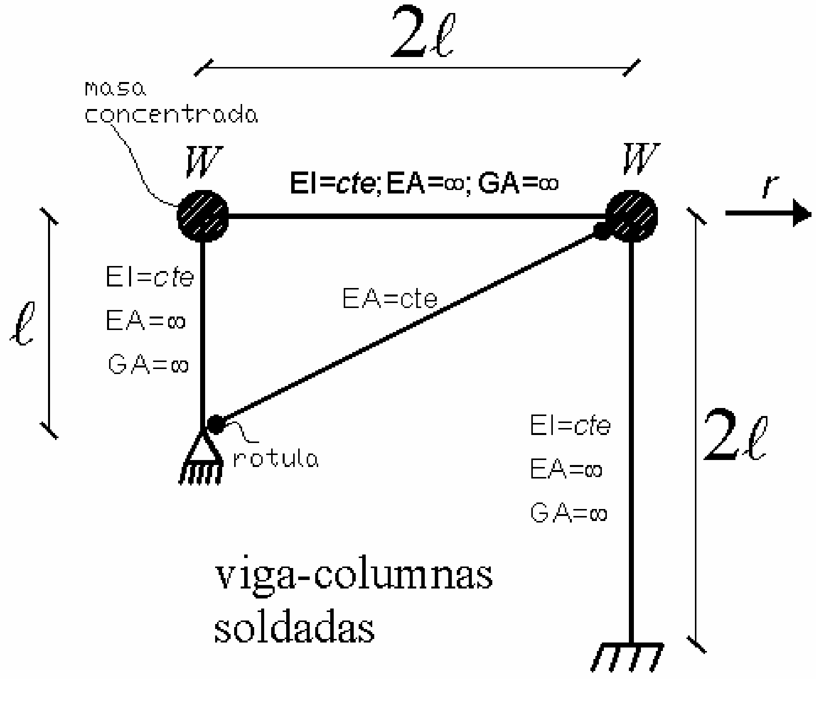
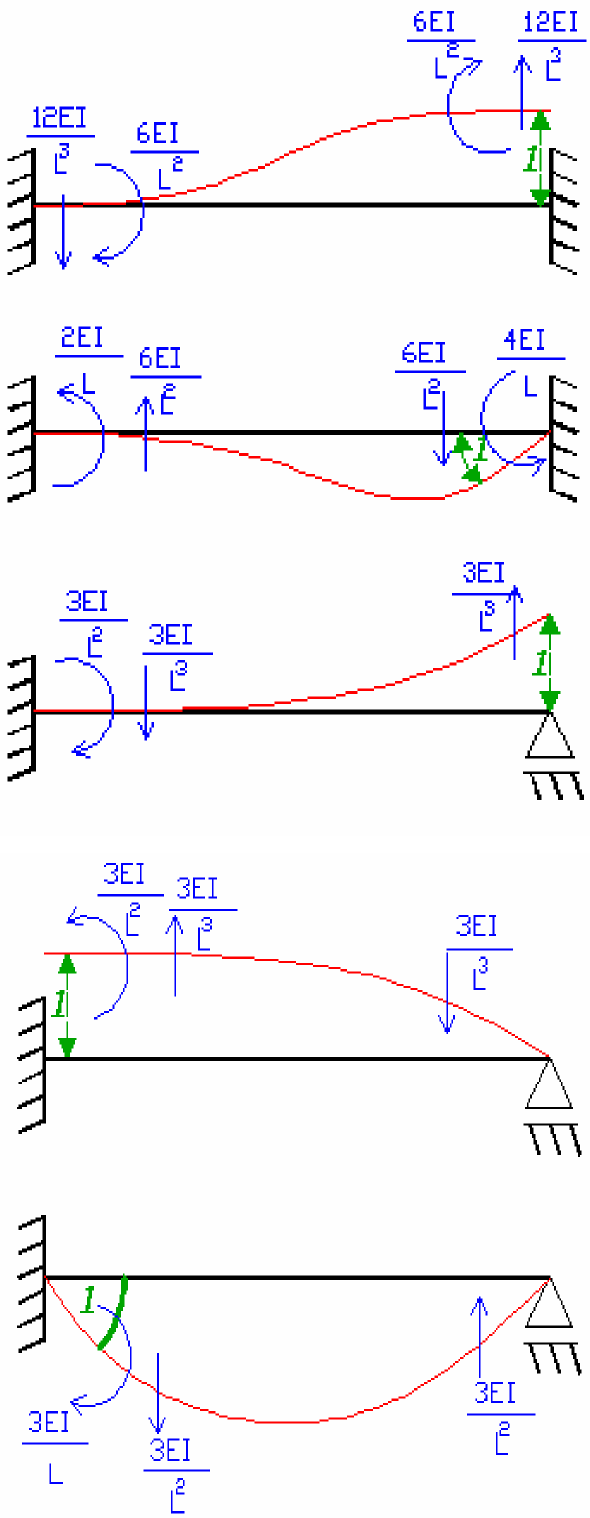
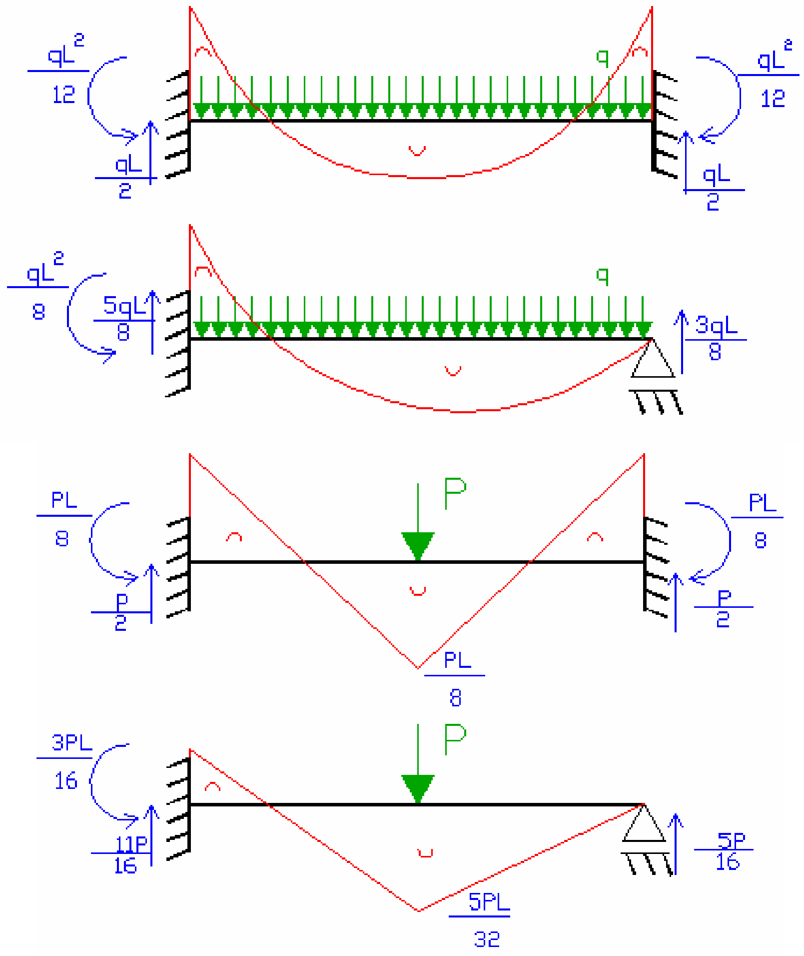


Tabla Básica de Rigidez

CI42G Dinámica de Estructuras

Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Aux: Francisco Hernández Prado.



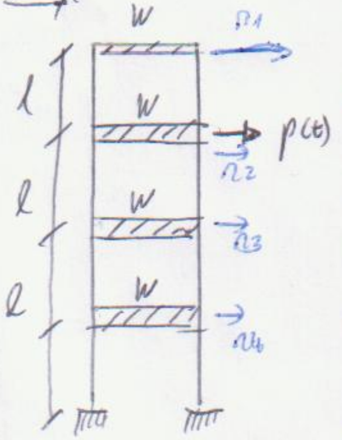


Tipo de Simetría						
	Plana		Axial		Puntual	
	S	A	S	A	S	A
Nx	?	0	?	0	?	0
Ny	0	?	0	?	?	0
Nz	0	?	?	0	?	0
Mx	0	?	?	0	0	?
My	?	0	0	?	0	?
Mz	?	0	?	0	0	?

P1

Pauta Ejercicio 5 CI42G

FHP



$EI = 1000\ \text{tonf}\cdot m^2$

$EA = \infty$

$GA = \infty$

$\beta = 0\%$

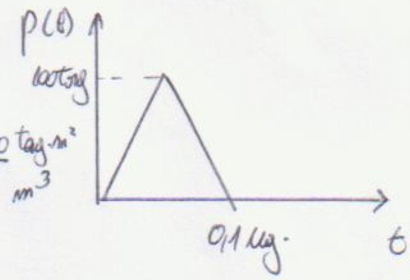
$W = 100\ \text{tonf}$

$g = 9{,}8\ m/s^2$

$\bar{m} = 0$

$l = 2m.$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}00 \\ 0{,}75 \\ 0{,}50 \\ 0{,}25 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1{,}00 \\ 0{,}90 \\ 0{,}65 \\ 0{,}35 \end{Bmatrix}$$



$$m = \frac{W}{g} = \frac{100\ \text{tonf}}{9{,}8\ m/s^2} = 10{,}2\ \frac{\text{tonf}\, s^2}{m} \qquad K_{piso} = \frac{24EI}{l^3} = \frac{24000}{8}\ \frac{\text{tonf}\cdot m^2}{m^3}$$

$$K_{piso} = 3000\ \frac{\text{tonf}}{m}$$

i) m^*, k^*, ω.

∘) para ϕ_1:

a partir de ecuación → $m^* = \sum \phi_i^2 \cdot m_i = m \sum \phi_i^2 \qquad (m^* = \{\phi\}^T [M] \{\phi\})$.

→ $k^* = \sum_{i=1}^{3} K_{piso} (\phi_i - \phi_{i-1})^2 + K_{piso} \phi_4^2 \qquad (k^* = \{\phi\}^T [K] \{\phi\})$

$$m_1^* = 10{,}2 \cdot (1^2 + 0{,}75^2 + 0{,}5^2 + 0{,}25^2) = 19{,}124\ \text{tonf}\cdot s^2/m$$

$$k_1^* = 3000 \cdot \left[(1-0{,}75)^2 + (0{,}75-0{,}5)^2 + (0{,}5-0{,}25)^2 + 0{,}25^2 \right] = 750\ \text{tonf}/m.$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1^*}{m_1^*}} = 6{,}26\ \text{rad/seg}.$$

∘) para ϕ_2:

$$m_2^* = 10{,}2\ (1^2 + 0{,}9^2 + 0{,}65^2 + 0{,}35^2) = 24{,}02\ \text{tonf}\, s^2/m$$

$$k_2^* = 3000 \left[(1-0{,}9)^2 + (0{,}9-0{,}65)^2 + (0{,}65-0{,}35)^2 + 0{,}35^2 \right] = 855\ \text{tonf}/m$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2^*}{m_2^*}} = 5{,}96\ \text{rad/seg}. -$$

$\Rightarrow \omega_2 < \omega_1 \Rightarrow$ es mejor ϕ_2. $\Rightarrow T = T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 1{,}05\ \text{seg}.$

NOTA: ALTERNATIVAMENTE: $m^* = \{\phi\}^T \cdot [M] \{\phi\}$. y $k^* = \{\phi\}^T [K] \{\phi\}$.

DONDE: $[M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $[K] = \frac{24EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (Se llega a los mismos resultados).

iii) Máximo momento de las columnas.

$$m_2^* \ddot{y}(t) + k_2^* y(t) = p^*(t) \qquad p^*(t) = \underbrace{\phi_{22}}_{0,9} \cdot p(t)$$

$$\Rightarrow m_2^* \ddot{y}(t) + k_2^* y(t) = 0,9 \cdot p(t).$$

$t_d = 0,1$ seg; $\Rightarrow \frac{t_d}{T} = \frac{0,1 \text{ seg}}{1,05 \text{ seg}} = 0,1 < 0,25 \Rightarrow$ se puede calcular como impacto de corta duración.

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{con} \quad \dot{y}_0 = \frac{\int_0^{t_d} p^*(t)\,dt}{m_2^*}$$

$$\dot{y}_0 = 0,9 \times \frac{100^{[\text{Ton}]} \cdot 0,1^{[\text{seg}]}}{2} \times \frac{1}{24,02 \left[\frac{\text{Ton}\, s^2}{m}\right]} = 0,186 \, \frac{m}{\text{seg}}.$$

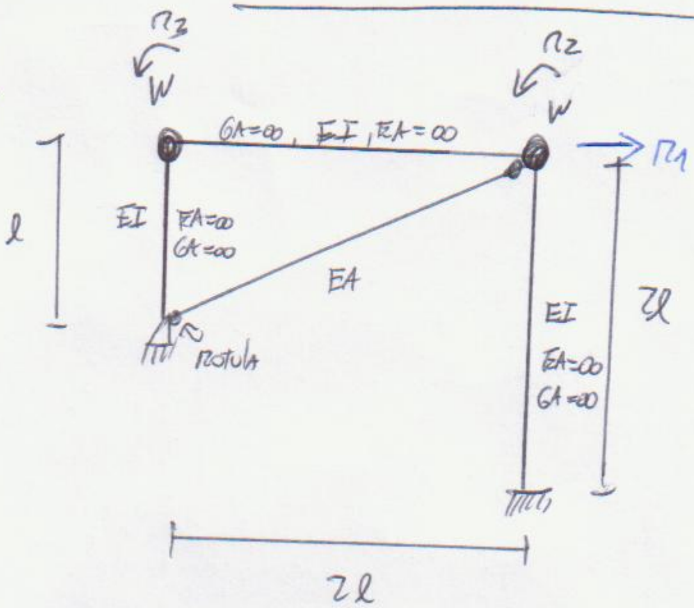
$$\Rightarrow y_{max} = \frac{\dot{y}_0}{\omega} = \frac{0,186 \text{ m/seg}}{5,96 \text{ rad/seg}} = 0,0312 \text{ m} = 3,12 \text{ cm}.$$

$$M_{max\ columnas} = \frac{6EI}{l^2} \cdot \overbrace{\max\{\phi_i - \phi_{i-1}\}}^{\text{N entrepiso max}} \cdot y_{max}$$

$$= \frac{6 \cdot 1000 \text{ ton} \cdot m^2}{4 m^2} \cdot \underset{\text{piso inferior}}{0,35} \cdot 0,0312 = \underline{16,4 \text{ Ton} \cdot m}$$

Pauta Ejercicio 5 CI42G FHP

P2



m^*? k^*? x^T?

3 GDL estáticos

1 GDL dinámico ⇒ condensar.

$\tan(\alpha) = 1/2 \Rightarrow \alpha = 26{,}56^{\circ}$

$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0{,}894$

•) $m^* = 2W/g$.

•) k^*: Determinando la matriz de rigidez para los GDL estáticos

$$K_{11} = \frac{12EI}{(2l)^3} + \frac{3EI}{l^3} + \frac{EA}{\sqrt{5}l}\cdot\cos^2(\alpha) \; ; \quad K_{12} = \frac{6EI}{(2l)^2} \; ; \quad K_{13} = \frac{3EI}{l^2}$$

$$K_{22} = \frac{4EI}{2l} + \frac{4EI}{2l} \; ; \quad K_{23} = \frac{2EI}{2l} \; ; \quad K_{33} = \frac{4EI}{2l} + \frac{3EI}{l}$$

$$\Rightarrow \quad [K] = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{9}{2}\frac{EI}{l^3} + \frac{EA}{\sqrt{5}l}\cdot\cos^2(\alpha) & \frac{3}{2}\frac{EI}{l^2} & 3\frac{EI}{l^2} \\ \hline \frac{3}{2}\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} & \frac{EI}{l} \\ 3\frac{EI}{l^2} & \frac{EI}{l} & 5\frac{EI}{l} \end{array}\right]$$

Condensando al GDL r_1:

$$\tilde{K} = K_{ee} - K_{ep} K_{pp}^{-1} K_{pe}$$

Con:

$$K_{ee} = \left[\frac{9}{2} \frac{EI}{l^3} + \frac{EA}{\sqrt{5}l} \cos^2(\alpha) \right] \qquad K_{ep} = \left[\frac{3}{2} \frac{EI}{l^2} \quad \frac{3EI}{l^2} \right]. \qquad K_{pe} = K_{ep}^T$$

$$K_{pp} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{pp}^{-1} = \frac{l}{EI} \cdot \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \tilde{K} = K_{ee} - \left(\frac{EI}{l^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{l}{EI}\right) \cdot \frac{1}{19} \cdot \left[3/2 \quad 3 \right] \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K} = \frac{9}{2} \frac{EI}{l^3} + \frac{EA}{\sqrt{5}l} \cos^2(\alpha) - \frac{153}{76} \frac{EI}{l^3} = \frac{189}{76} \frac{EI}{l^3} + \frac{EA}{\sqrt{5}l} \cos^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m^*}{K^*}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2W}{g \cdot \left[\frac{189}{76} \frac{EI}{l^3} + \frac{EA}{\sqrt{5}l} \cdot \cos^2(\alpha) \right]}}$$