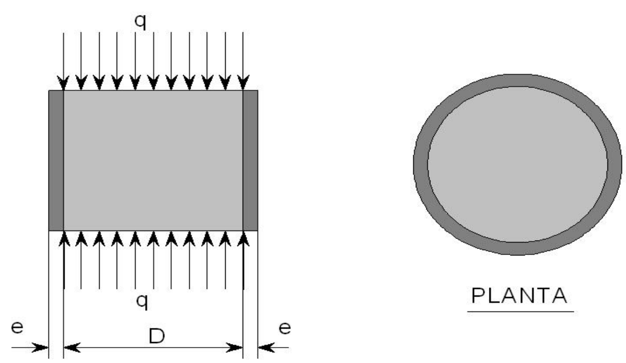
Clase Auxiliar ♯3
CI42F Mecánica de Solidos II
Auxiliar: Francisco Milla G.

RELACIONES CONSTITUTIVAS

1. Problema 2

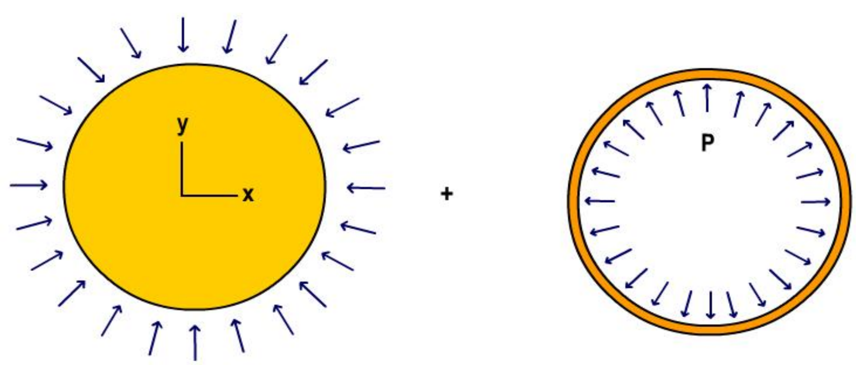
La figura muestra un material sólido que se encuentra dentro de un recipiente circular de pared muy delgada. El material es cargado con una presión uniforme en la dirección del eje del cilindro. Suponiendo que antes de la carga los cuerpos están libres de tensiones y que no existe roce entre las paredes del recipiente y el cuerpo, determinar el módulo elástico aparente del material, es decir, la razón entre la carga distribuida aplicada y la deformación unitaria en la dirección de la carga. Las propiedades de los materiales son E_1, ν_1 para el material interno y E_2, ν_2 para el material del recipiente. ¿Qué ocurre cuando $\frac{E_2}{E_1}$ es muy grande y cuando es muy chico?.

Nota: Suponer que la tensión es uniforme a través de la pared del recipiente. Recordar que la tensión en dirección circunferencial en la pared del recipiente para una presión p es $\sigma = \frac{pD}{2e}$ y que la deformación radial para dicha presión(cambio de dimensión del diámetro) es $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.



Solución:

El problema lo podemos ver también como una descomposición plana en los siguientes estados:



Por lo tanto tenemos un problema de tipo plano y simétrico.

Tomando un eje de coordenadas cartesiano en el centro del cuerpo y utilizando la configuración del problema(simetría), tenemos la siguiente información para las tensiones[1] y deformaciones:

$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -P$
$\sigma_{zz} = -q$
$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$

Para el cálculo del módulo de elasticidad, sabemos que:

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.

<u>Cálculo de la deformación(en este caso, ε_{zz})</u>

Por definición: $\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E_1} - \frac{\nu_1 \sigma_{xx}}{E_1} - \frac{\nu_1 \sigma_{yy}}{E_1} \Rightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{2P\nu_1}{E_1} - \frac{q}{E_1} \rightarrow \varepsilon_{zz}(P)$

<u>Cálculo de P</u>

Por condiciones del problema, tenemos que, $\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta D}{D} = \frac{pD}{2eE_2}(1)$
Calculamos, por definición, $\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_1} - \frac{\nu_1 \sigma_{yy}}{E_1} - \frac{\nu_1 \sigma_{zz}}{E_1} = \frac{P(\nu_1 - 1)}{E_1} + \frac{q\nu_1}{E_1}(2)$

(1)=(2), $\Rightarrow \frac{pD}{2eE_2} = \frac{P(\nu_1-1)}{E_1} + \frac{q\nu_1}{E_1}$
$\Rightarrow P(\frac{D}{2eE_2} + \frac{(1-\nu_1)}{E_1}) = \frac{q\nu_1}{E_1}$
$\Rightarrow P(\frac{E_1 D + 2eE_2(1-\nu_1)}{2eE_2 E_1}) = \frac{q\nu_1}{E_1}$
$\Rightarrow P = (\frac{2eE_1E_2\nu_1}{E_1D + 2eE_2(1-\nu_1)})q$

<u>Cálculo de E_{ap}</u>

Reemplazando la expresión anterior en ε_{zz}.

$\varepsilon_{zz} = \frac{2\nu_1}{E_1}(\frac{2eE_1E_2\nu_1}{E_1D + 2eE_2(1-\nu_1)})q - \frac{q}{E_1}$
$\varepsilon_{zz} = q(\frac{\nu_1^2 4eE_2}{E_1(E_1D + 2eE_2(1-\nu_1))} - \frac{1}{E_1})$
$\varepsilon_{zz} = -q(\frac{-\nu_1^2 4eE_2E_1 + E_1(E_1D + 2eE_2(1-\nu_1))}{E_1^2(E_1D + 2eE_2(1-\nu_1))})$

Por lo tanto:

$E_{ap} = \frac{E_1(E_1D + 2eE_2(1-\nu_1))}{E_2(2e(1-\nu_1) - 4\nu_1^2 e) + E_1 D}$

[1] Ver problema del disco

Análisis de casos

Transformamos la solución:

$E_{ap} = \frac{E_1(E_1D+2eE_2(1-\nu_1))}{E_2(2e(1-\nu_1)-4\nu_1^2e)+E_1D}\frac{\frac{1}{E_1}}{\frac{1}{E_1}}$

$E_{ap} = \frac{E_1(D+\frac{E_2}{E_1}2e(1-\nu_1))}{\frac{E_2}{E_1}(2e(1-\nu_1)-4\nu_1^2e)+D}$

Cuando $\frac{E_2}{E_1} \rightarrow 0$, o sea razón pequeña, tenemos:

$E_{ap} = \frac{E_1D}{D}$ o sea, $E_{ap} = E_1$(Como si el recipiente no existiera).

Cuando $\frac{E_1}{E_2} \rightarrow 0$, o sea razón grande($\frac{E_2}{E_1}$), tenemos:

$E_{ap} = \frac{E_1(E_1D+2eE_2(1-\nu_1))}{E_2(2e(1-\nu_1)-4\nu_1^2e)+E_1D}\frac{\frac{1}{E_2}}{\frac{1}{E_2}}$

$E_{ap} = \frac{E_1(\frac{E_1}{E_2}D+2e(1-\nu_1))}{2e(1-\nu_1)-4\nu_1^2e+\frac{E_1}{E_2}D}$

Evaluamos el caso:

$E_{ap} = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1-\nu_1)-2\nu_1^2}$