Principio de Superposición

Considerando las hipótesis de deformaciones infinitesimales y relaciones constitutivas lineales, las ecuaciones que gobiernan un problema de elasticidad, incluyendo las condiciones de borde, son ecuaciones lineales. Debido a la naturaleza de estas ecuaciones, las variables dependientes varían en forma lineal con respecto a las fuerzas externas, por lo que pueden ser superpuestas.

El principio de superposición puede ser enunciado como sigue: “Las variables dependientes (tensiones, deformaciones, y desplazamientos) determinadas para cada grupo de fuerzas externas (fuerzas de volumen, fuerzas de superficie y desplazamientos prescritos) actuando en forma independiente, pueden ser superpuestas de manera de dar los valores totales de ellas debido a la acción combinada de las fuerzas externas.

Considerar σ_{xx}, …, σ_{xz} los componentes del tensor de tensiones que satisfacen las ecuaciones que gobiernan el problema de elasticidad y las condiciones de borde, para un cuerpo elástico sometido a fuerzas de volumen f_i y fuerzas de superficie t_{ni}, con $i = x, y, z$. Adicionalmente, considerar los componentes del tensor de tensiones g_{xx}, …, g_{xz} en el mismo cuerpo debido a las fuerzas de volumen y superficie F_i y T_{ni}, respectivamente.

Considerando las ecuaciones de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \qquad (x, y, z)$$

$$\frac{\partial g_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \qquad (x, y, z)$$

las ecuaciones de compatibilidad (Beltrami-Michell)

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial f_x}{\partial x} \\ \nabla^2 \sigma_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial f_y}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} (x, y, z)$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 g_{xx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial F_x}{\partial x} \\ \nabla^2 g_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} (x, y, z)$$

y las condiciones de borde o contorno

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{xx}n_x+\sigma_{yx}n_y+\sigma_{zx}n_z=t_{nx}\\ g_{xx}n_x+g_{yx}n_y+g_{zx}n_z=T_{nx}\end{array}\right\}\quad (x,y,z)$$

Sumando las respectivas ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y condiciones de borde, se tiene

$$\frac{\partial(\sigma_{xx}+g_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(\sigma_{xy}+g_{xy})}{\partial y}+\frac{\partial(\sigma_{xz}+g_{xz})}{\partial z}+\left(f_x+F_x\right)=0\quad (x,y,z)$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2(\sigma_{xx}+g_{xx})+\cdots=-\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial(f_x+F_x)}{\partial x}+\cdots\right)-2\dfrac{\partial(f_x+F_x)}{\partial x}\\ \nabla^2(\sigma_{yz}+g_{yz})+\cdots=-\left(\dfrac{\partial(f_y+F_y)}{\partial z}+\dfrac{\partial(f_z+F_z)}{\partial y}\right)\end{array}\right\}(x,y,z)$$

$$(\sigma_{xx}+g_{xx})n_x+(\sigma_{yx}+g_{yx})n_y+(\sigma_{zx}+g_{zx})n_z=(t_{nx}+T_{nx})\quad (x,y,z)$$

Estos resultados muestran que los componentes del tensor de tensiones ($\sigma_{xx}+g_{xx}$) … son soluciones para un cuerpo elástico sujeto a fuerzas de volumen (f_x+F_x) + $\cdots$ y fuerzas de superficie (t_{nx} + T_{nx}) + $\cdots$. En otras palabras, dos (o más) campos de tensiones pueden ser superpuestos de manera de entregar los resultados para una acción combinada de estados de cargas. Debido a que las ecuaciones que gobiernan las deformaciones y desplazamientos son lineales también, resulta que el principio de superposición también es válido para estas variables.

Unicidad de la Solución de un Problema de Elasticidad

Se debe demostrar que la solución de un problema de elasticidad es única, es decir, para una distribución de fuerzas de volumen y superficie, existe sólo una solución para los componentes del tensor de tensiones que satisfagan las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y condiciones de borde.

Considerar un cuerpo sometido a una distribución de fuerzas de superficie t_{ni} y a un campo de fuerzas de volumen f_i. Asumir que existen dos conjuntos de componentes de tensiones, en que cada uno satisface las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y condiciones de borde. Las soluciones se denotan por σ_{ij} y g_{ij}, respectivamente. La primera solución debe satisfacer las ecuaciones de equilibrio

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+f_x=0\quad (x,y,z)$$

las ecuaciones de compatibilidad

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_{xx}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial f_x}{\partial x}\\
&\nabla^2\sigma_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}=-\left(\frac{\partial f_y}{\partial z}+\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}(x, y, z)$$

y las condiciones de borde o contorno

$$\sigma_{xx}n_x+\sigma_{yx}n_y+\sigma_{zx}n_z=t_{nx}\quad (x, y, z)$$

En forma similar, la segunda solución debe satisfacer las relaciones siguientes

$$\frac{\partial g_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial g_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial g_{xz}}{\partial z}+f_x=0\quad (x, y, z)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 g_{xx}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial f_x}{\partial x}\\
&\nabla^2 g_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}=-\left(\frac{\partial f_y}{\partial z}+\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}(x, y, z)$$

$$g_{xx}n_x+g_{yx}n_y+g_{zx}n_z=t_{nx}\quad (x, y, z)$$

Introduciendo las variables $h_{ij}=\sigma_{ij}-g_{ij}$ y restando las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y condiciones para ambas soluciones del problema se elasticidad, se tiene

$$\frac{\partial h_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial h_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial h_{xz}}{\partial z}=0\quad (x, y, z)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 h_{xx}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0\\
&\nabla^2 h_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}=0
\end{aligned}\right\}(x, y, z)$$

$$h_{xx}n_x+h_{yx}n_y+h_{zx}n_z=0\quad (x, y, z)$$

Notar que debido al carácter lineal de las ecuaciones y a que las mismas fuerzas de volumen y superficie aparecen en ambos conjuntos de ecuaciones soluciones, éstas se cancelan cuando se restan las ecuaciones que satisfacen las soluciones σ_{ij} y g_{ij}. Por lo tanto, las tensiones h_{ij} representan un estado de tensiones en el cuerpo sin la acción de las fuerzas de volumen ni de las de superficie. Entonces, un cuerpo con cero fuerzas de volumen y cero fuerzas de superficie está en un estado no tensionado (sin tensiones) y las tensiones en todos los puntos del volumen del cuerpo son cero. Por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} h_{xx} &= \sigma_{xx} - g_{xx} = 0 \\ h_{xz} &= \sigma_{xz} - g_{xz} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (x, y, z)$$

Por lo tanto, ambos estados de tensiones son idénticos por lo que la solución al problema de elasticidad es única.

Principio de Saint-Venant

El principio de Saint-Venant extiende de manera considerable el uso de las soluciones de un problema de elasticidad. Este principio establece que las tensiones debido a dos cargas estáticamente equivalentes aplicadas sobre un área pequeña son significativamente diferentes sólo en una vecindad del área sobre la cual son aplicadas las cargas. A distancias mayores, comparadas con las dimensiones lineales del área sobre la cual se aplican las cargas, los efectos de estos dos estados de carga son los mismos. Considerar la siguiente ilustración

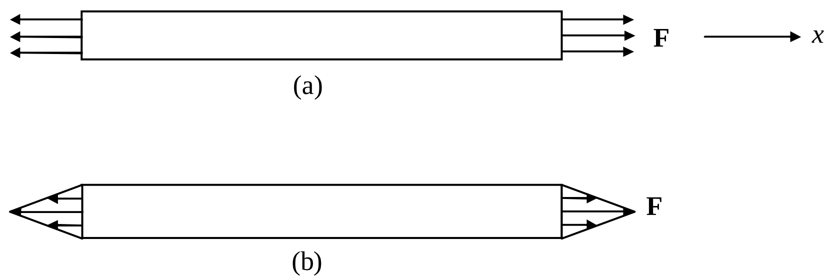

Fig. 1 Barra sometida a cargas estáticamente equivalentes

Considerar la barra sometida a un estado de tensiones de tracción uniforme *p* que produce una fuerza axial neta igual a **F,** tal como lo muestra la Fig. 1(a). Los componentes del tensor de tensiones son

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} = p \\ &\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{zx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \end{aligned}$$

los que satisfacen las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y condiciones de borde. Además, el teorema de unicidad de la solución de un problema de elasticidad, asegura que esta es la única distribución de tensiones para esta barra.

Suponer que la fuerza axial **F** es el resultado de una distribución de tensiones normales no uniforme, tal como lo muestra la Fig. 1(b). Los componentes del tensor de tensiones anteriormente descrito no representa la solución para esta barra, ya que las condiciones de borde en los extremos de la barra no son satisfechas. Sin embargo, el principio de Saint-Venant establece que estas tensiones internas (σ_{ij}) aproxima deforma muy cercana la verdadera distribución de tensiones internas, excepto en los extremos de la barra.