

Mecánica de Sólidos II
Semestre Primavera 2007

Tarea 1

Fecha de Entrega: lunes 3 de septiembre de 2007

Problema 1:

1. Sea $U(\mathbf{x}) = U(x_1, x_2, x_3)$ una función escalar. Demostrar que el gradiente de la función $U(\mathbf{x})$ es un vector.
2. Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que el gradiente de del vector $\mathbf{u}$ es un tensor de segundo orden.
3. Considerar el gradiente $\partial x_i / \partial x_k$ del vector posición x_i ($i = 1, 2, 3$). En el punto 2 se demostró que el gradiente de un vector es un tensor de orden 2. En términos generales se puede escribir

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = 1 \quad \text{para } i = k$$
$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = 0 \quad \text{para } i \neq k$$

Los componentes del tensor de segundo orden definidos por las relaciones anteriores, pueden ser expresados en forma matricial

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde δ_{ij} se denomina delta de Kronecker. Demostrar que δ_{ij} es un tensor isotrópico, es decir, los componentes del tensor δ_{ij} son los mismos en cualquier sistema de referencia.

4. Demostrar que $\omega_{ij} u_k$ es un tensor de tercer orden, donde ω_{ij} es un tensor de orden dos y u_k un vector cualquiera. Generalizar este resultado para el producto entre un tensor de orden n y un tensor de orden m .

Problema 2: El estado tensional de un punto P que pertenece a un cuerpo deformable está dado por el tensor de tensiones siguiente

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar:

1. El vector de tensión t_i en el punto P sobre un plano normal al eje x_1 .
2. El vector de tensión t_i en el punto P sobre un plano donde los componentes del vector normal están en la razón 1:-1:2
3. El vector de tensión t_i sobre un plano que contiene al punto P y es paralelo al plano $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$.

4. El componente normal y tangencial del vector de tensión t_i calculado en (3).
5. Las tensiones principales en el punto P.
6. Las direcciones de las tensiones principales en el punto P.

Problema 3: Considerar el siguiente tensor de tensiones σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

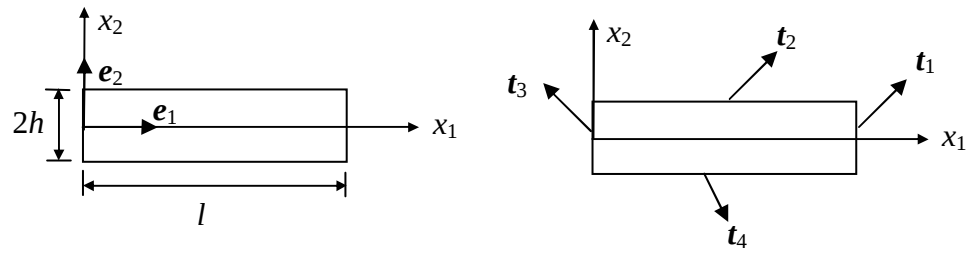
Encontrar las tensiones principales y demostrar que las direcciones principales, que corresponden a la mayor y menor tensión principal, son perpendiculares al eje x_2 . Además, determinar en forma gráfica, en el plano definido por las tensiones normales y tangenciales, la región donde se concentran los estados de tensiones posibles en cualquier plano que contiene al punto para el cual se ha definido el tensor de tensiones σ_{ij} .

Problema 4:

Considerar la barra de largo l , ancho b y altura $2h$. Considerar el tensor de tensiones siguiente

$$\sigma_{ij} = \frac{3q_0}{4bh^3} \begin{pmatrix} \left(x_1^2 x_2 - \frac{2}{3} x_2^3 \right) & x_1 (h^2 - x_2^2) & 0 \\ x_1 (h^2 - x_2^2) & \frac{1}{3} (x_2^3 - 3x_2 h^2 - 2h^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinar que los puntos en el interior del cuerpo (barra) satisfacen las condiciones de equilibrio. Considerar que el vector fuerzas por unidad de volumen es nulo.
2. Calcular los vectores de tensiones $t_1, \dots, t_4$ que actúan en las superficies que limitan el volumen de la barra (ver figura).
3. A qué problema de la mecánica de sólidos (mecánica de materiales) podrían ser asociados las distribuciones de tensiones encontradas en el punto (3). Justifique claramente su respuesta.



Problema 5:

1. Demuestre que el siguiente estado de tensiones está en equilibrio.

$$\sigma_x = 3x^2 + 3y^2 - z$$

$$\tau_{xy} = z - 6xy - 3/4$$

$$\sigma_y = 3y^2$$

$$\tau_{xz} = x + y - 3/2$$

$$\sigma_z = 3x + y - z + 5/4$$

$$\tau_{yz} = 0$$

2. Para el estado de tensiones en el punto $x = 1/2$, $y = 1$, $z = 3/4$, determinar las tensiones y direcciones principales.
3. Considerar un cuerpo sometido a un estado de corte biaxial referido a un sistema de referencia x_1 - x_2 - x_3 :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2x^3 & 0 \\ 2x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontrar los ejes principales y las tensiones principales para un punto del cuerpo de coordenadas (0, 2, 3).

4. Para el estado de tensiones mostrados en el punto (3), encontrar el tensor de tensiones referenciado a un sistema de coordenadas rotado 30° con respecto al eje x_3 .

