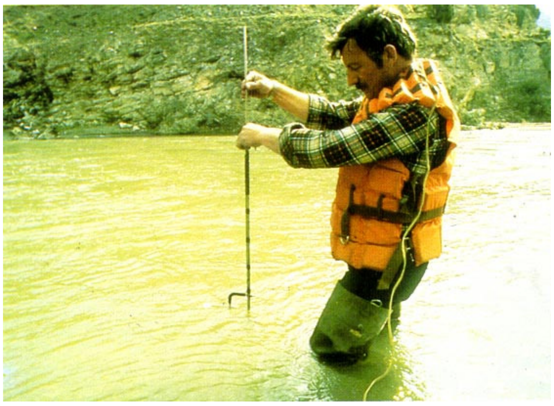


CONTINUACIÓN CAPÍTULO 7

Modelos Probabilísticos discretos mas usados en Hidrología

Ensayo Tipo Bernoulli

Probabilidad de que en un año cualquiera ocurra $Q \geq Q^*$ es p

De un año a otro crecidas son independientes por lo tanto si se define variable aleatoria discreta X=1 si ocurre $Q \geq Q^*$

X=0 en cualquier otro caso

$P_x(x) = p \qquad \text{si } x = 1$

$\qquad\;\; = 1-p \qquad \text{si } x = 0$

$\mu_x = E[x] = 1*p + 0*(1-p)$

$\sigma^2_x = E[(x-\mu_x)^2] = (1-p)*p$

¿Cuál es la probabilidad de que esa crecida ocurra 4 veces en los próximos 5 años?

Año	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
X	1 1 1 1 0	1 1 1 0 1	1 1 0 1 1	1 0 1 1 1	0 1 1 1 1
$P_x(x)$	p p p p(1-p)	p p p(1-p)p	p p(1-p)p p	p(1-p) p p	(1-p)p p p p
	$p^4(1-p)$	$p^4(1-p)$	$p^4(1-p)$	$p^4(1-p)$	$p^4(1-p)$

$P(\text{4 crecidas en 5 años}) = 5p^4(1-p)$

Distribución Binomial B(n,p)

$$P(x)=\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

μ_x = E[x] =np

σ^2_x = E[(x-μ_x)^2] = np(1-p)

Si P excedencia de Q* en un año es 0,02

En promedio, en 50 años ocurre 1 vez, con una varianza de 0,98

¿Cuantos años pasarán antes que el caudal Q* se iguale o exceda?

La probabilidad de tener r o menos éxitos en n ensayos independientes dada la probabilidad de éxito p en cada ensayo

$$P(x \le r) = F(r) = \sum_{x=0}^{r} \binom{n}{x} p^x (1-p)^x$$

Distribución Geométrica

P(crecida en año n)= $(1-p)^{n-1}p$

Cuál es la probabilidad de que la próxima crecida ocurra en n años o menos?

o

Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos 1 crecida en los próximos n años?

$$P[N \leq n] \equiv 1-(1-p)^n$$

$\mu_N = 1/p$ $\sigma^2_N = (1-p)/p^2$

Distribución Geométrica

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{Si } x=0,1,2\ldots \\ 0 & \text{Si x tiene otro valor} \end{cases}$$

F(t)=0 para t<0 y

para t>0 :

$$F(t) = \sum_{x=0}^{t} p(1-p)^x$$

Cuál es la probabilidad de que en 50 años ocurra *exactamente* 1 crecida mayor o igual que la de T =50 años?

T =50 años → **P=0,02**

$$P(x)=\binom{50}{1}\,0{,}02^{1}(1-0{,}02)^{49}$$

$$=0{,}37$$

Cuál es la probabilidad de que en 50 años ocurran *exactamente* 3 crecidas mayores o iguales que la de T =50 años?

$$P(x)=\binom{50}{3}\,0{,}02^{3}(1-0{,}02)^{47}$$

$$=0{,}06$$

Cuál es la probabilidad de que en 50 años ocurran *1 o mas* crecidas que excedan o igualen la de T =50 años?

$$P(x)=1-\binom{50}{0}\,0{,}02^{0}(1-0{,}02)^{50}$$

$$=0{,}64$$

Se han dispuesto 15 sistemas independientes para el control de crecidas, usando T=200 años. Cuál será la distribución del número de sistemas que fallan debido a la ocurrencia de la crecida de T=200 años, al menos 1 vez después de 50 años de la construcción?

$$P(K=k)=\binom{15}{k}\,p_1^{k}(1-p_1)^{15-k}$$

Probabilidad de que cualquiera de los sistemas falle al menos 1 vez en los 50 años cuando en cualquier año la probabilidad de falla es p=1/T = 1/200

p_1=1-P(no hay fallas)

$=1-\binom{50}{0}0{,}005^{0}(1-0{,}005)^{50}$

=0,222

$$P(K=k)=\binom{15}{k}\,0{,}222^{k}(1-0{,}222)^{15-k}$$

P[K=0] = 0,023 P[K=1] = 0,099

P[K=2] = 0,198....

Distribución de Poisson

Número de sucesos que ocurren en intervalos determinados de tiempo o espacio, suponiendo que los sucesos ocurren en forma independiente y a una tasa constante

$$P_X(x)=\frac{e^{-m}m^{x}}{x!}$$

μ_x = m

σ^2_x = m^2

Probabilidad de tener exactamente x sucesos en un intervalo determinado, siendo m la tasa de ocurrencia

Proceso de Markov

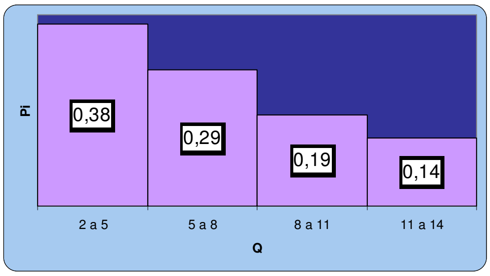
La probabilidad en cualquier tiempo, de que el sistema esté en un estado dado, depende sólo en el conocimiento del estado del sistema en el tiempo inmediatamente anterior

$$P(x_{n+1} = j / x_0 = i_0, x_1 = i_1, \ldots, x_{n-1} = i_{n-1}, x_n = i_n)$$
$$= P(x_{n+1} = j / x_n = i)$$

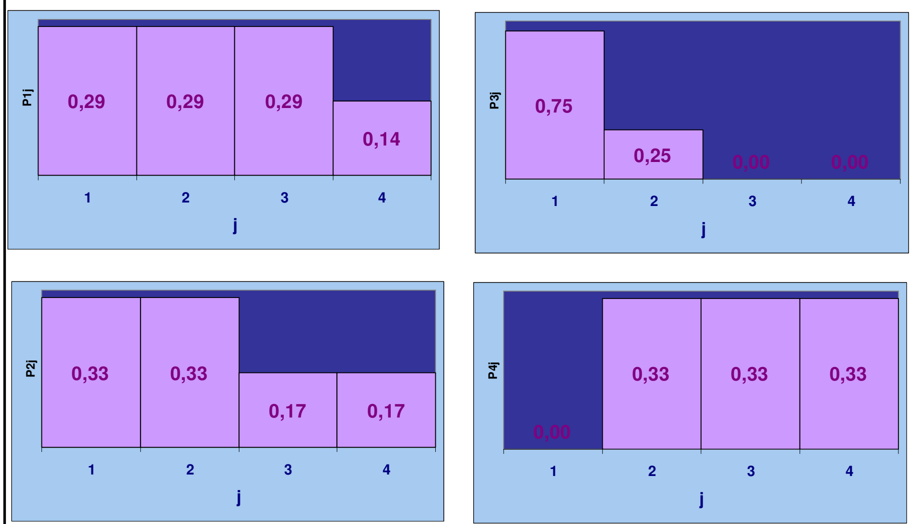
Si $P(x_{n+1} = j / x_n = i)$ **es independiente de n**

El proceso posee probabilidades de transición estacionarias P_{ij}

Proceso de Markov



Caudales Medios Anuales (m^3/s)
2,8
14,1
8,6
7,5
9,1
4,0
8,4
3,6
7,3
2,7
7,7
6,5
5,1
12,3
14,1
7,4
2,8
9,5
3,4
4,6
2,0



Probabilidades de Transición

Estado i en año y	Estado j en año y+1			
	1	2	3	4
1	0,29	0,29	0,29	0,14
2	0,33	0,33	0,17	0,17
3	0,75	0,25	0,00	0,00
4	0,00	0,33	0,33	0,33

$$P_i^{(y+1)} = P_i^y P_{ij}$$

$$P_i^y = (0,1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,29 & 0,29 & 0,29 & 0,14 \\ 0,33 & 0,33 & 0,17 & 0,17 \\ 0,75 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0,33 & 0,33 \end{bmatrix}$$

Es proceso de Markov?

MODELOS PROBABILÍSTICOS CONTINUOS

Distribución Uniforme

$f_X(x) = 1/(b-a)$ si $a<x\leq b$

$f_X(x) = 0$ si x tiene otro valor

$\mu_x = (b+a)/2$

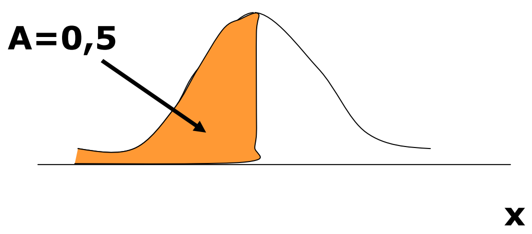
$\sigma^2_x = (b-a)^2/12$

Distribución Normal

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$F(b) = P(x \leq b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

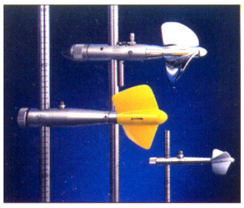
$z=(x-\mu)/\sigma \Rightarrow P(x\leq b)=P(z\leq(b-\mu)/\sigma)$



Q máximos instantáneos período pluvial en Mapocho en Los Almendros

	Q	Ln(Q)
Media	49,8	3,082
Desv. Estándar	71,7	1,303

Caudal max pluvial m^3/s	Caudal max deshielo m^3/s
13,6	19,9
68,2	44,0
15,6	20,8
2,7	17,9
5,0	14,1
8,7	22,4
36,8	28,6
12,9	26,0
77,1	21,0
34,5	35,3
17,6	32,1
23,2	64,2
5,6	29,2
85,4	6,5
8,0	21,0
2,4	8,3
1,9	3,7
76,4	15,0
16,2	21,1
18,7	10,6
90,0	47,5
15,3	42,1
25,4	42,4
8,1	16,9
325,0	20,5
234,0	63,8
12,3	36,0
137,0	24,6
8,7	10,9
137,0	30,2
20,5	20,2



Si fdp es normal cual es el caudal asociado a T=50 años??

AREAS BAJO LA DISTRIBUCION NORMAL

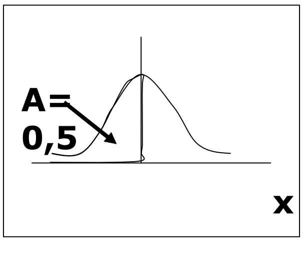
($\mu=0$, $\sigma=1$)

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1163	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4009	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	,4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

fdp normal

$$\textit{Variable} \quad \textit{estandarizada} \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$



B=½ [1+0,196854|z|+0,115194 |z|²+ 0,000344 |z|³+0,019527 |z|⁴] ⁻⁴

Z<0 F(z)=B z>0 F(z)=1-B Error<0,00025

Factor de frecuencia

$$w=[\mathrm{Ln}\,(1/p^2)]^{1/2}$$

Si p>0,5 usar 1-p **1/T**

$$z = w - \frac{2{,}515517 + 0{,}802853w + 0{,}010328w^2}{1 + 1{,}432788w + 0{,}1889269w^2 + 0{,}001308w^3}$$

Distribución LogNormal

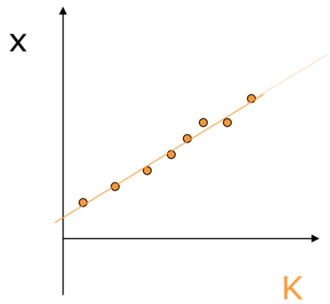
y=Ln (x)

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-(y-\mu_y)^2/(2\sigma_y^2)}$$

$z=(y-\mu_y)/\sigma_y$

Método del factor de frecuencia

$$x_T = \bar{x} + K_T \sigma$$



En fdp normal y lognormal K_T corresponde a la variable estandarizada