CI41A – Control 2
Martes 16 de Octubre 2007

P1)

a) Encuentre una expresión para la altura crítica en un canal de sección triangular (talud 1: K) y demuestre que la energía mínima de escurrimiento es igual a 5/4 de h_C. (1,5 ptos.)

b) Por el canal de la figura, compuesto por dos tramos de gran longitud, escurre un caudal Q. El primer tramo tiene pendiente i_1 y sección trapezoidal. El segundo tramo es de sección rectangular y tiene una mayor pendiente i_2. Ambas secciones tienen el mismo ancho basal, b.

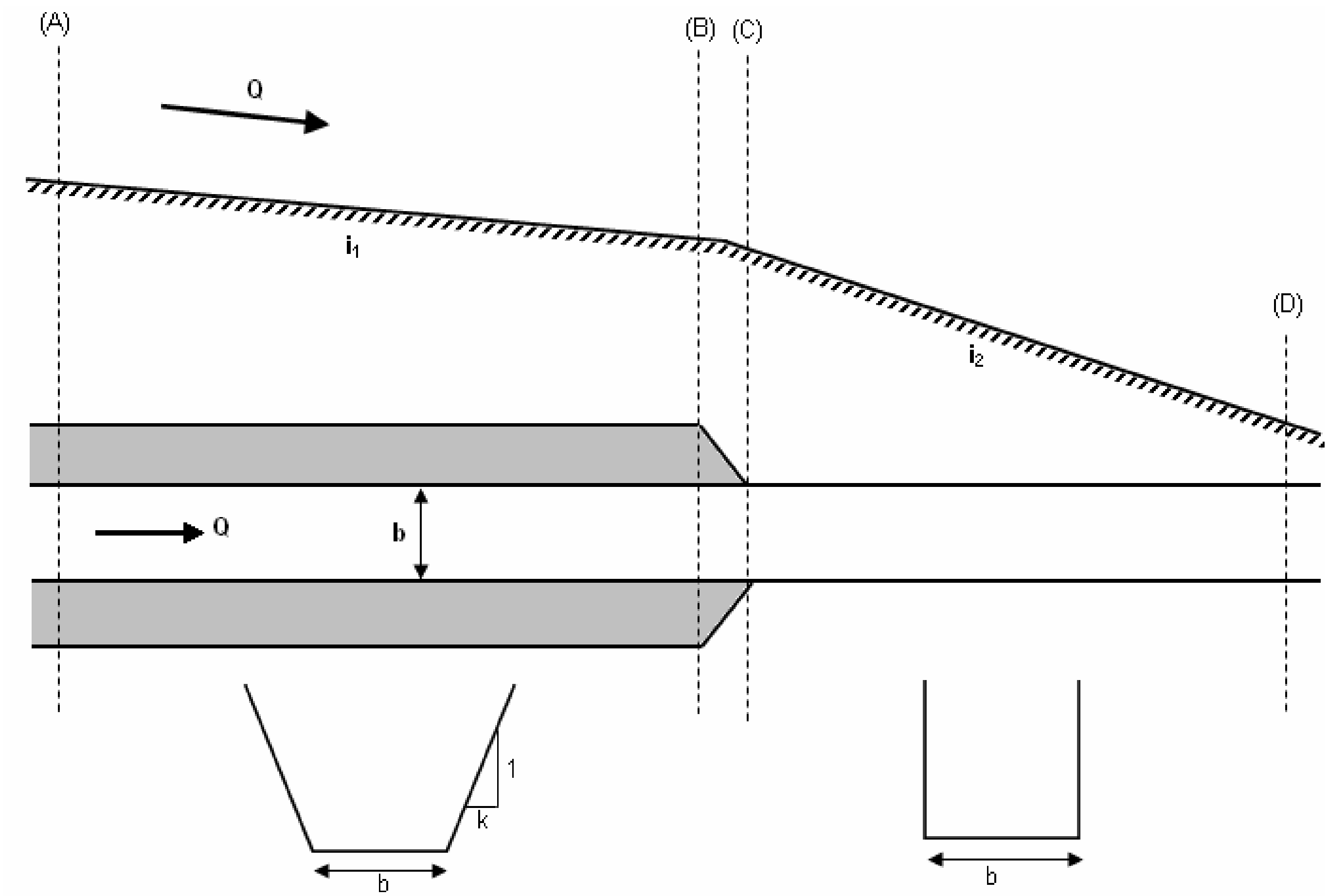
Encuentre la altura de escurrimiento en cada una de las secciones (A), (B), (C) y (D). Considere que la transición entre los dos tramos del canal es muy breve. (4,5 ptos.)

Datos:

$Q = 15$ [m^3/s] $h_{N1} = 3.141$ [m]

$b = 2$ [m] $h_{N2} = 1.264$ [m]

$K = 1$



© 2007. Prohibida la reproducción sin la autorización de la División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile.

P2) Usted ha sido contactado por un agricultor que desea modificar el sistema de riego al interior de su predio. Para mejorar el sistema se requiere inicialmente el diseño del canal que conduce las aguas desde un embalse hacia el predio. Un esquema del canal, el que posee tres tramos de distintas características, se muestra en la Figura 2.

Se sabe que la altura normal en el Tramo 1 es igual a ***hn*** y que ésta se alcanza a producir en el tramo. Por otro lado, el Tramo 2, de corta extensión, posee una pendiente adversa (de subida) debido a las condiciones del terreno, pero se sabe que para efectos de cálculos, es posible obviar el efecto de la contra-pendiente para el análisis de fuerzas, pero no para el de energías. Por último, en el Tramo 3 existe una compuerta que permite regular las alturas de escurrimiento en el sistema.

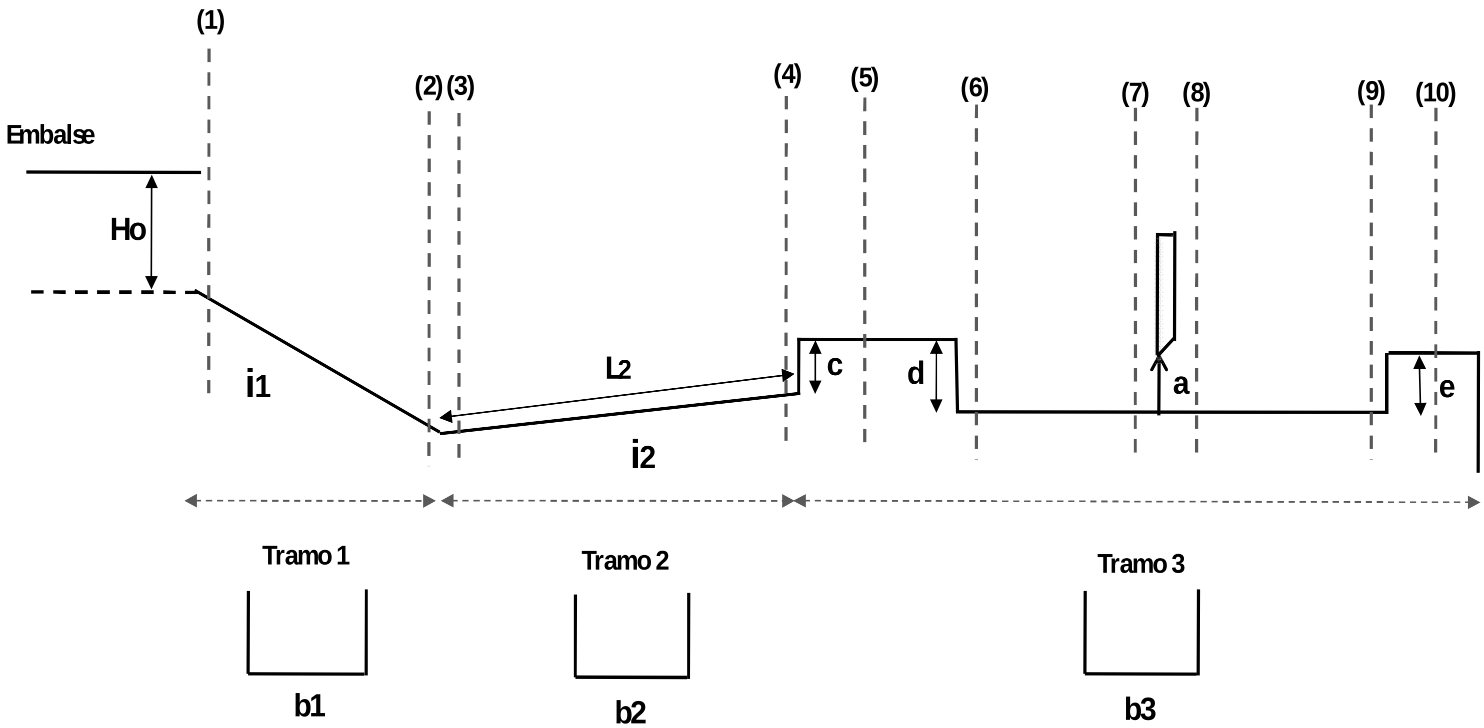


Figura 2: Esquema canal de regadío.

Datos :			
Ho [m] =	1.3	b1 [m] =	0.4
i2 [m/m] =	0.0012	b2 [m] =	0.5
L2 [m] =	10	b3 [m] =	0.4
c [m] =	0.2	μ =	0.6
d [m] =	0.3	hn [m] =	0.67
e [m] =	0.5		

© 2007. Prohibida la reproducción sin la autorización de la División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile.

Para las condiciones indicadas anteriormente, se pide:

a) Determinar el caudal conducido por el canal. (1 ptos.)

b) ¿Cuál debe ser la abertura de la compuerta para que un resalto aguas abajo de ella se mantenga al pie? (2 ptos.)

c) Determine las alturas de escurrimiento en las secciones indicadas en el sistema, considerando una abertura de compuerta igual a **1,36** veces la determinada en b). De existir resaltos, determine su altura conjugada. (2,5 ptos.)

d) Indique aproximadamente donde se ubicarán los resaltos en el sistema. (0,5 ptos.)

Indicaciones:

- Suponga que los Tramos 2 y 3 son suficientemente cortos como para despreciar pérdidas friccionales en ellos. Por el contrario, el Tramo 1 es suficientemente largo como para que la fricción equilibre el efecto de la gravedad y por lo tanto puede suponer que en él se alcanza altura uniforme.

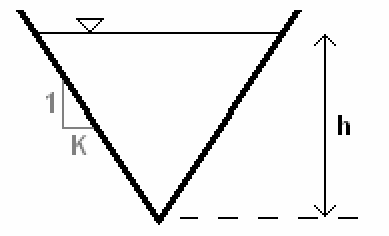
- Considere que las únicas pérdidas singulares en el sistema corresponden a aquellas generadas por él o los posibles resaltos existentes.

- Si es necesario un análisis de fuerzas en el Tramo 2, considere que el desnivel existente por la pendiente es despreciable. No así para el caso de un análisis de energías.

© 2007. Prohibida la reproducción sin la autorización de la División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile.

Pauta Pregunta 1:

a)
El área de escurrimiento en la sección triangular de la figura es Ω=K*h^2.
Entonces la energía puede escribirse como:



$$E = h + \frac{\left(\frac{Q}{K \cdot h^2}\right)^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g \cdot K^2 \cdot h^4}$$

Para encontrar la altura crítica se debe encontrar la energía mínima de escurrimiento, por lo que derivamos E con respecto a h e igualamos a cero.

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{2 \cdot Q^2}{g \cdot K^2 \cdot h^5} = 0$$

$$h_C = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{g \cdot K^2}}$$

Calculamos ahora E_C:

$$E_C = h_C + \frac{Q^2}{2g \cdot K^2 \cdot {h_C}^4}$$

$$E_C = h_C + \frac{Q^2}{2g \cdot K^2 \cdot \left(\frac{2Q^2}{g \cdot K^2}\right)^{4/5}}$$

$$E_C = h_C + \frac{Q^{2/5}}{2^{9/5} \cdot g^{1/5} \cdot K^{2/5}}$$

$$E_C = h_C + \frac{2^{1/5} \cdot Q^{2/5}}{2^2 \cdot g^{1/5} \cdot K^{2/5}}$$

$$E_C = h_C + \frac{1}{4} \cdot \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{g \cdot K^2}}$$

$$E_C = h_C + \frac{h_C}{4} = \frac{5}{4} \cdot h_C$$

© 2007. Prohibida la reproducción sin la autorización de la División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile.

b) En primer lugar debemos encontrar la altura de escurrimiento crítico en ambos tramos.
Para el tramo 1 se tiene una sección trapezoidal. La superficie de escurrimiento puede escribirse como Ω = b*h + k*h^2.

Entonces la energía es:

$$E = h + \frac{\left(\frac{Q}{b\cdot h + K\cdot h^2}\right)^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g\cdot(b\cdot h + K\cdot h^2)^2}$$

Derivando e igualando a cero para encontrar h_C:

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{Q^2\cdot(b+2K\cdot h)}{g\cdot(b\cdot h + K\cdot h^2)^3} = 0$$

La solución de la ecuación anterior, que debe ser encontrada iterando, es la altura crítica correspondiente al tramo 1. Se encuentra h_{C1}=1.408 [m]. Su energía critica es entonces E_{C1}=1.907 [m].

Para el tramo 2, correspondiente a una sección rectangular, se calcula h_{C2} y E_{C2}:

$$h_{C2} = \left(\frac{\left(Q/b\right)^2}{g}\right)^{1/3}$$

$$E_{C2} = \frac{3}{2}\cdot h_{C2}$$

Se encuentra h_{C2}=1.791 [m] y E_{C2}=2.686 [m].

Entonces, como $h_{N1}>h_{C1}$, el tramo 1 tiene pendiente suave
como $h_{N2}<h_{C2}$, el tramo 2 tiene pendiente fuerte.

Sabemos que ambos tramos del canal son muy largos, por lo tanto se alcanzan las alturas normales. Para el caso del tramo 1, la altura normal es mayor que la critica, entonces corresponde a un escurrimiento subcrítico y por lo tanto es controlado aguas abajo. La altura normal se alcanza entonces al comienzo del tramo, es decir, en la sección (A).
Por el contrario, en el caso del tramo 2, la altura normal es menor que la critica, es decir, corresponde a un escurrimiento supercrítico, lo que implica que es controlado por aguas arriba. La altura normal se alcanza entonces en el extremo de aguas abajo, es decir, en la sección (D).

Obtenemos por lo tanto un río en el tramo 1 y un torrente en el tramo 2. Para compatibilizar ambos escurrimientos debe existir una crisis.

© 2007. Prohibida la reproducción sin la autorización de la División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile.

¿Donde ocurre la crisis: (B) o (C)? Para determinarlo basta con comparar las energías críticas de ambos tramos, pues se trata de la mínima energía que puede tener el escurrimiento para existir. Entonces la crisis ocurre en la sección cuya E_C es mayor, es decir, ocurre en (C). (Esto es coherente pues el cambio de sección es un angostamiento, y sabemos que las crisis ocurren en los puntos altos y/o angostos.)

Para calcular la altura de escurrimiento en (B), se desprecian las pérdidas de energía entre (B) y (C). Entonces

$$E_B = E_C = E_{C2} = h_B + \frac{Q^2}{2g \cdot \left(b \cdot h + K \cdot h^2\right)^2}$$

Se encuentra:

$$h_B = \begin{cases} -0.961 \\ 0.876 \quad \text{[m]} \\ 2.606 \end{cases}$$

Escogemos h_B = 2.606 [m] pues corresponde al escurrimiento subcrítico.

En resumen:

h_A=	3.141 [m]
h_B=	2.606 [m]
h_C=	1.791 [m]
h_D=	1.264 [m]

© 2007. Prohibida la reproducción sin la autorización de la División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile.

Pauta Pregunta 2:

a) Suponemos crisis en la entrada, lo cual significar suponer una pendiente fuerte en la entrada. Con lo que se tiene que la energía del embalse es igual a la energía crítica del primer tramo:

$$Ho = E_{c1} = 1.3m$$

Dado que el canal es de geometría cuadrada se tiene:

$$E_{c1} = \frac{3}{2} h_{c1} = 1.3m \Rightarrow h_{c1} = 0.867\,m$$

$$\Rightarrow h_c^{\,3} = \left(\frac{q^2}{g}\right) \Rightarrow Q = 1.011\, m^3/s$$

Comparando la altura crítica con la normal se tiene que se cumple el supuesto.

$$h_c = 0.867\,m > \ h_n = 0.67\,m \Rightarrow \textit{Pendiente Fuerte}$$

b) Inicialmente calculamos las alturas críticas por cada uno de los tramos:

E_{c1} =	1.30 m
E_{c2} =	1.12 m
E_{c3} =	1.30 m

Dado que se alcanza la altura normal en el Tramo 1, se tiene que en la sección (2) la energía es:

$$E_2 = E_{hn} = 1.396m \ \ y \ \ E_2 = E_3$$

La energía en (4) la obtenemos descontando la cota adicional debida a la pendiente adversa:

$$E_4 = E_3 - L_2 * i_2 = 1.384\,m$$

$$\Rightarrow E_5 = E_4 - c = 1.184\,m < E_{c3} = 1.3m$$

La energía en (5) sería menor que la crítica, por lo que se debe imponer crisis en (5). Realizando esto continuamos calculando las energías:

$$E_5 = E_{c3} = 1.3m \ \Rightarrow E_6 = E_5 + d = 1.6\,m$$

$$\Rightarrow E_6 = E_7 = E_8 = E_9 = 1.6\,m \ \Rightarrow E_{10} = E_9 - e = 1.1m < E_{c3}$$

Dado que se tiene que la energía en (10) sería menor que la crítica, existe crisis en (10). Con esto podemos realizar ya los cálculos necesarios.

Imponiendo crisis al final del canal se tiene:

© 2007. Prohibida la reproducción sin la autorización de la División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile.

$$E_{10} = 1.3m \Rightarrow E_9 = E_{10} + e = 1.8m \Rightarrow h_{9subcrítico} = 1.685m$$

Para que el resalto se encuentre al pie es necesario que las momentas de (8) y (9) sean iguales, para lo cual se tiene:

$$m_9 = 1.807\ m^2 \Rightarrow m_8 = 1.807\ m^2 \Rightarrow \begin{cases} h_{8\text{supercrítico}} = 0.375m \Rightarrow\ a = 0.625\ m \\ h_{8\text{subcrítico}} = 1.685m \end{cases}$$

c) La abertura de la compuerta corresponde a 1.36 veces el valor calculado en b), por lo que se tendrá a = 0.85 m.

$$\Rightarrow E_8 = 1.763m \Rightarrow E_{10} = E_8 - e = 1.263m < E_{c3} = 1.3m \Rightarrow \textit{Crisis en la salida del canal.}$$

$$\Rightarrow E_{10} = 1.3m \Rightarrow E_9 = E_{10} + e = 1.8\ m \Rightarrow h_9 = 1.685m$$

Si calculamos las momentas para (8) y (9) se tiene:

$$m_8 = 1.408m^2\ \ y\ m_9 = 1.807m^2 \Rightarrow \textit{El resalto se ahoga hacia la compuerta.}$$

Se impone así la altura en (9) y se calculan las alturas asociadas al resalto ahogado en (8):

$$m_9 = 1.806m^2 = m_8\ \ y\ \mu a = 0.51m \Rightarrow h' = 1.028\ m \Rightarrow E_8 = 2.281m$$

Igualando energía entre (7) y (8) se tiene:

$$E_7 = 2.281m \Rightarrow \begin{cases} h_{7sub} = 2.215\ m \\ h_{7\text{super}} = 0.418\ m \end{cases}$$

Conservando energía entre (7), (6) y (5) se tiene:

$$E_7 = E_5 + d \Rightarrow E_5 = 1.981\ m > E_{c3} \Rightarrow \textit{No existe la crisis antes considerada.}$$

$$\Rightarrow E_7 = E_6 \Rightarrow h_6 = 2.215m$$

$$\Rightarrow E_7 = E_5 + d \Rightarrow E_5 = 1.981\ m \Rightarrow h_{5sub} = 1.89m\ \left(h_{5\text{ super}} = 0.463m\right)$$

$$\Rightarrow E_5 = E_4 - c \Rightarrow E_4 = 2.181m \Rightarrow h_{4sub} = 2.135m\ \left(h_{4\text{ super}} = 0.336m\right)$$

Dado que se tiene un torrente en el Tramo 1, y recién calculamos que en (4) existe un río, se sabe que existe un resalto entre las secciones (2) y (4).
La altura en (2) es igual a la altura normal, ya que se entrega como dato inicial este hecho, por lo que tanto al realizar el análisis de energía se obtiene:

© 2007. Prohibida la reproducción sin la autorización de la División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile.

$$E_2 = E_{hn} = 1.396\,m \Rightarrow E_2 = E_3 \Rightarrow h_{3\text{super}} = 0.476\,m\;\left(h_{3\text{sub}} = 1.266\,m\right)$$

Hasta este punto se han calculado todas las alturas de canal. La compatibilización de algunas de ellas se logra a través de dos resaltos.

$$h_1 = 0.867\,m\;,\; h_2 = 0.67\,m\;,\; h_3 = 0.476\,m\;,\; h_4 = 2.135\,m\;,\; h_5 = 1.89\,m\;,\; h_6 = 2.215\,m$$
$$h_7 = 2.215\,m\;,\; h_8\left(\mu a\right) = 0.51\,m\;,\; h_8' = 1.028\,m,\; h_9 = 1.685\,m,\; h_{10} = 0.867\,m$$

d) Conocemos que existen 2 resaltos al interior del canal, de los cuales podemos decir:

1.- El resalto de aguas abajo, se encuentra ahogado contra la compuerta.
2.- El resalto de aguas arriba, compatibiliza el escurrimiento de torrente logrado en el tramo 1 con la condición de río de la sección (4). Para conocer hacia donde se encuentra el resalto es necesario comparar momentas.

$$m_3 = 0.988\,m$$
$$m_4 = 2.475\,m$$
$$\Rightarrow$$

La momenta de la sección (4) es mayor que la de (3), por lo que el resalto se ve forzado a tomar una ubicación en el Tramo 1.

© 2007. Prohibida la reproducción sin la autorización de la División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile.