CI41A – HIDRÁULICA
Semestre Primavera 2007

Profesor: Yarko Niño
Aux.: Cristian Godoy, Sofia Mordojovich, Carlos Reiher

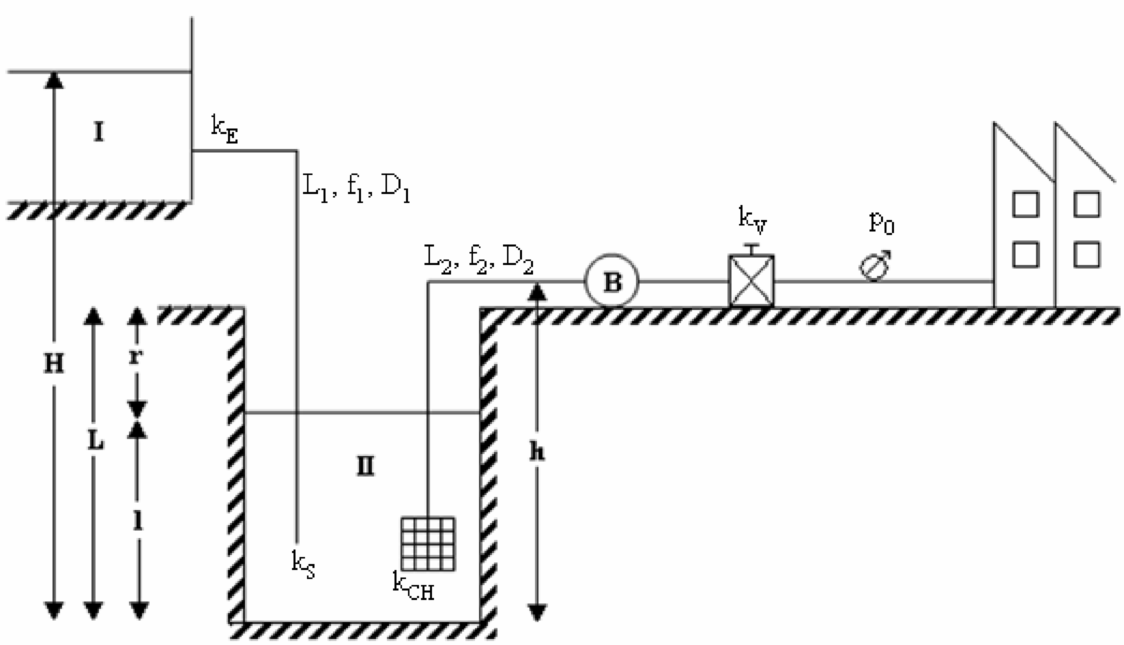
AUXILIAR 1

PROBLEMA 1

Desde un gran estanque (I) se alimenta un estanque de regulación (II) para suministrar agua a una industria, como se muestra en la figura. El flujo desde el estanque (I) es por gravedad, y el agua se envía a la industria por medio de una bomba. Considerando los datos dados en la figura, determine la dimensión L del estanque de regulación, teniendo en cuenta que debe tener una revancha de r = 0.5 [m].

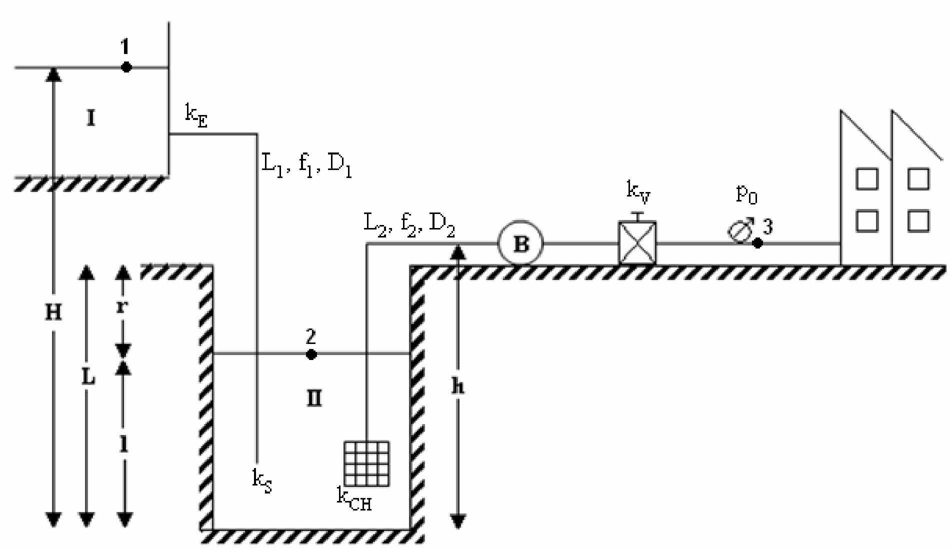
Datos:
Área basal estanque II = 16 [m^{2}]
Curva característica Bomba: $H= 25-100Q^2$ (Q en [m^3/s] y H en [m])

$f_1 = 0.02$	$L = 1000$ [m]	$D_1 = 0.4$ [m]	
$f_2 = 0.018$	$L_2 = 500$ [m]	$D_2 = 0.5$ [m]	
$k_E = 0.5$	$k_S = 1.0$	$k_{CH} = 10$	$k_V = 0.2$
$H = 30$ [m]	$h = 10$ [m]	$p_o/\gamma = 15$ [m]	



SOLUCIÓN:

Sean 1, 2 y 3 los puntos que se indican en la figura:



Bernoulli entre 1 y 2:

$$B_1 - \Lambda_f - \Lambda_S = B_2$$

$$H - \left(\frac{f_1 \cdot L_1}{D_1} + k_E + k_S \right) \frac{v_1^{\,2}}{2g} = l$$

Pero $\dfrac{v_1^{\,2}}{2g} = \dfrac{8 Q_1^{\,2}}{\pi^2 D^4 g}$

Reemplazando por los valores del enunciado, se obtiene

$$l = 30 - 166.4 \cdot Q_1^{\,2}$$

Por lo tanto, se obtiene: $\boxed{Q_1 = \sqrt{\dfrac{30 - l}{166.4}} \qquad (1)}$

Bernoulli entre 2 y 3:

$$B_2 - \Lambda_{CH} + \Delta H_{BOMBA} - \Lambda_V - \Lambda_f = B_3$$

$$l + 25 - 100 \cdot Q_2^{\,2} - \left(k_{CH} + k_V + \frac{f_2 \cdot L_2}{D_2} \right) \cdot \frac{v_2^{\,2}}{2g} = h + \frac{v_2^{\,2}}{2g} + \frac{p_0}{\gamma}$$

Reemplazando por los valores del enunciado, se obtiene

$l = 138.64 \cdot {Q_2}^2$

De donde: $\boxed{Q_2 = \sqrt{\dfrac{l}{138.64}} \qquad (2)}$

Ahora, para encontrar el máximo valor de *l*, se deriva e iguala a cero:

$$\frac{dl}{dt} = 0$$

Pero

$A \cdot \dfrac{dl}{dt} = \dfrac{dVol}{dt} = Q_{ENTRADA} - Q_{SALIDA} = 0$, donde A es el área basal del estanque.

Por lo tanto, $\boxed{Q_1 = Q_2 \qquad (3)}$

$$\sqrt{\frac{l_{MAX}}{138.64}} = \sqrt{\frac{30 - l_{MAX}}{166.4}}$$

De donde se obtiene $l_{MAX} = 13.63 \quad [m]$

Por lo tanto $L = l_{MAX} + r = 13.63 + 0.5 = 14.13 \qquad [m]$

PROBLEMA 2 (C1 Primavera 2003)

La torre de agua de los estudios de la Warner Brothers (Burbank, CA), no es tan solo un ícono de esta empresa cinematográfica sino que también es el origen de parte del agua que se consume en sus instalaciones. Para ello, existe una estación de bombeo con tres bombas (ver figuras).
Se requiere analizar las características de impulsión, para hacer un diagnostico orientado al mejoramiento del servicio turístico que constituye la visita a estos estudios. Para ello, se modela el sistema como una impulsión de largo L y diámetro D, desde un estanque mayor a cota constante z_E, hasta la torre con un nivel de agua a cota z_T. La tubería deberá conducir un caudal Q_0.

a) Determine expresiones explicitas para los caudales Q_I y Q_{II} en la estación de bombeo (distribución de caudales en bombas en paralelo), en función de las expresiones de las curvas características, el caudal Q_0 del sistema y el coeficiente de perdida de la válvula ubicada en B.
b) Esquematice la curva característica conjunta del sistema de bombeo ilustrado, señalando los rangos de caudales y las ecuaciones respectivas para cada rango. Considere explícitamente los coeficientes de perdida de las válvulas en A y B.
c) Determine los coeficientes de perdida singular en las válvulas A y B para impulsar un caudal Q_0 de 0.045 [m^3/s], considerando que la tubería esta en régimen hidrodinámicamente liso y que $Q_I = Q_{II} = Q_0/2$.

Indicación: En la estación de bombeo, desprecie perdidas friccionales y singulares, excepto las de las válvulas.

Curvas características:

B_1:	$H = 15-1300*Q^2$	(en general: $H_i = a_i - b_i*Q_i^2$)
B_2:	$H = 10-1500*Q^2$	
B3:	$H = 11-1200*Q^2$	H en [m] y Q en [m^3/s]

Datos:

$z_E = 120$ [m]	$z_T = 135$ [m]	$L = 400$ [m]	$D = 200$ [mm]
ν =10-6 [m^2/s]	$k_E = 1.0$	$k_C = 0.8$	$k_S = 0.5$

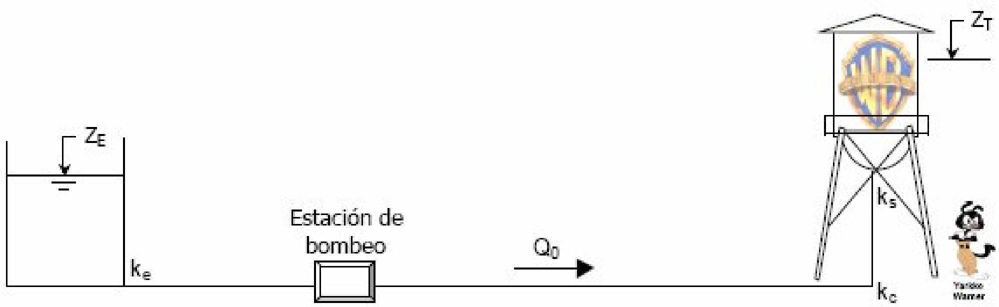


Figura 1a. Esquema del sistema

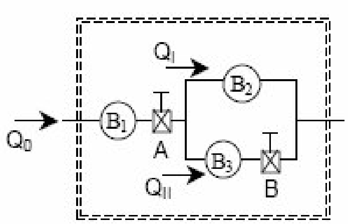
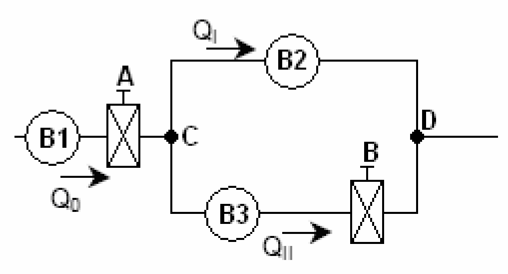


Figura 1b. Estación de bombeo

SOLUCIÓN:

Sean C y D los puntos dentro del sistema de bombeo como se muestra en la siguiente figura:



Bernoulli entre C y D:

- Rama superior: $B_C + \Delta H_2 = B_D$
- Rama inferior: $B_C + \Delta H_3 - \Lambda_S = B_D$

Al calcular el Bernoulli en el punto D, este debe ser igual para ambas ramas del sistema de bombas en paralelo.

Por lo tanto, al igualar B_D: $\Delta H_2 = \Delta H_3 - \Lambda_S$ donde: $\Delta H_2 = a_2 - b_2 * Q_I^2$

$\Delta H_3 = a_3 - b_3 * Q_{II}^2$

$$\Lambda_S = k_B \cdot \frac{v_{II}^2}{2g} = \frac{8 \cdot k_B \cdot Q_{II}^2}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g}$$

=> $$a_2 - b_2 \cdot Q_I^2 - a_3 + b_3 \cdot Q_{II}^2 + \frac{8 \cdot k_B}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g} \cdot Q_{II}^2 = 0$$

=> $$a_2 - b_2 \cdot Q_I^2 - a_3 + b_3' \cdot Q_{II}^2 = 0$$ donde $$b_3' = b_3 + \frac{8 \cdot k_B}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g}$$

Por continuidad: $Q_{II} = Q_0 - Q_I$

=> $$a_2 - b_2 \cdot Q_I^2 - a_3 + b_3' \cdot (Q_0 - Q_I)^2 = 0$$

=> $$(b_3' - b_2) \cdot Q_I^2 - 2b_3' Q_0 \cdot Q_I + a_2 - a_3 + b3' Q_0^2 = 0$$

=> $$\begin{cases} Q_I = \dfrac{b_3' Q_0}{b_3' - b_2} \pm \dfrac{\sqrt{b_3'^2 Q_0^2 - (b_3' - b_2) \cdot (a_2 - a_3 + b_3' Q_0^2)}}{b_3' - b_2} \\ Q_{II} = \dfrac{-b_2 \cdot Q_0}{b_3' - b_2} \mp \dfrac{\sqrt{b_3'^2 Q_0^2 - (b_3' - b_2) \cdot (a_2 - a_3 + b_3' Q_0^2)}}{b_3' - b_2} \end{cases}$$

El signo a elegir depende de los valores de las variables. Habrá una situación en que ambos caudales son reales positivos (o bien puede no existir solución).

b) Ecuación para bombas en paralelo

- Rama superior: $H_{BC} = a_2 - b_2 * Q_I^{\,2}$

$$\Rightarrow \quad Q_I = \sqrt{\frac{a_2 - H_{BC}}{b_2}}$$

- Rama inferior: $H_{BC} = a_3 - b_3 \cdot Q_{II}^{\,2} - \dfrac{8 \cdot k_B}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g} \cdot Q_{II}^{\,2}$

$$\Rightarrow \quad Q_{II} = \sqrt{\frac{a_3 - H_{BC}}{b_3'}} \qquad \text{donde} \quad b_3' = b_3 + \frac{8 \cdot k_B}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g}$$

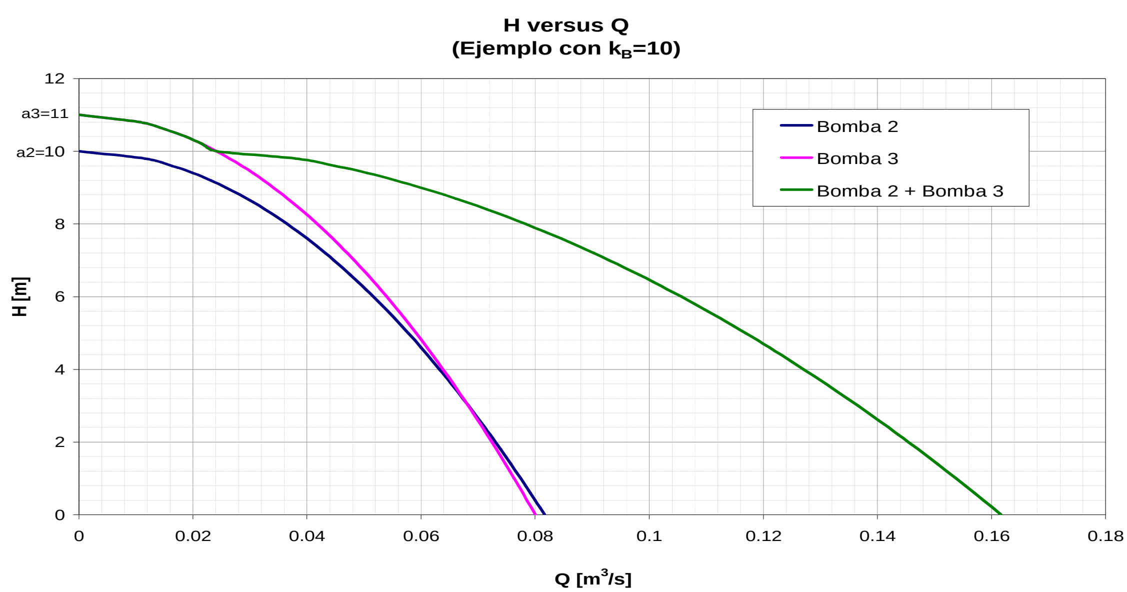
Como las bombas están en paralelo, el caudal total es igual a la suma de los caudales de cada rama, por lo tanto, la ecuación de las bombas 2 y 3 considerando la válvula B queda:

$$\boxed{Q_0 = Q_I + Q_{II} = \sqrt{\frac{a_2 - H_{BC}}{b_2}} + \sqrt{\frac{a_3 - H_{BC}}{b_3'}}}$$

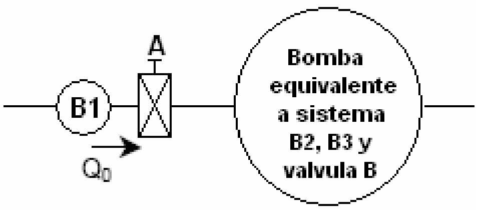
Nótese que el termino correspondiente a Q_I se indefine cuando $H_{BC} > a_2$, mientras que si $H_{BC} > a_3$, Q_{II} se indefine. Como $a_2 < a_3$, podemos separar el comportamiento del sistema en tres rangos:

- $H_{BC} > a_3$: ninguna de las dos bombas opera
- $a_3 > H_{BC} > a_2$: solo la bomba 3 opera
- $H_{BC} < a_2$: ambas bombas operan

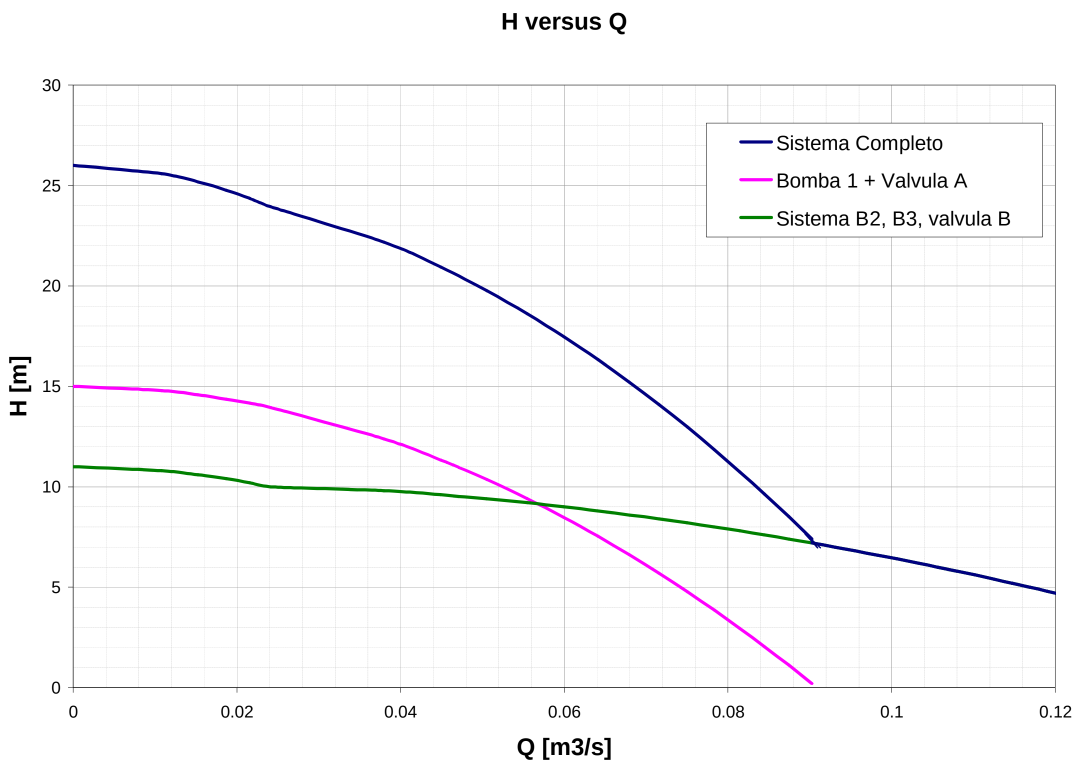
Lo anterior puede visualizarse gráficamente:



Ahora se debe incorporar el funcionamiento de la bomba 1 y la válvula A. Como se encuentran en serie, el caudal que pasa por la bomba 1 es el mismo que luego pasa por el sistema ya analizado.



Por lo tanto, en este caso se deben sumar las alturas de elevación, pues el caudal es el mismo.
Nótese que para que la bomba 1 funcione, se debe cumplir que $H_1 = a_1 - b_1'^{*}Q^2 > 0$, es decir que $Q > (a_1/b_1')^{0.5}$. Para caudales mayores a dicho valor, la bomba 1 deja de funcionar.
El grafico siguiente corresponde al caso en que $k_A = k_B = 10$.



c) <u>Calculemos primero k_B:</u>

Por igualdad de H_{BC} en ambas ramas: $a_2 - b_2{*}(Q_0/2)^2 = a_3 - b_3'{*}(Q_0/2)^2$

De donde: $$b_3' = \frac{4\cdot(a_3 - a_2)}{Q_0^{\ 2}} + b_2 = 3475.3$$

Pero $\quad b_3' = b_3 + \dfrac{8 \cdot k_B}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g}$ de donde: $\quad k_B = \dfrac{(b_3' - b_3) \cdot \pi^2 \cdot D^4 \cdot g}{8} = 44$

<u>Luego, se puede calcular k_A:</u>

Q_0= 0.045 [m^3/s] => v_0 = 1.43 [m/s]
=> Re = 1.43*0.2/10^{-6} = 2.86*10^5

Régimen hidrodinámicamente liso => $\dfrac{1}{\sqrt{f}} = 2 \cdot \log\left(\dfrac{\text{Re} \cdot \sqrt{f}}{2.51}\right)$

=> $f = 0.0146$

Bernoulli entre el estanque y la torre:

$B_E + \Delta H_{SIST\ BOMB} - \Lambda_f - \Lambda_S = B_T$

$$z_E + H_1 + H_{BC} - \left(\frac{f \cdot L}{D} + k_E + k_C + k_S\right) \cdot \frac{8 \cdot Q_0^{\,2}}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g} = z_T$$

donde $\quad H_1 = a_1 - b_1' \cdot Q_0^{\,2}$

$$H_{BC} = \begin{cases} a_2 - b_2 \cdot \left(\dfrac{Q_0}{2}\right)^2 \\ a_3 - b_3' \cdot \left(\dfrac{Q_0}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Para el cálculo de H_{BC} se puede ocupar cualquiera de las dos ramas pues como ya se vio, el H del sistema en paralelo es igual en ambas.

Entonces:

$$H_1 = a_1 - b_1' \cdot Q_0^{\,2} = z_T - z_E - a_2 + b_2 \cdot \left(\frac{Q_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{f \cdot L}{D} + k_E + k_C + k_S\right) \cdot \frac{8 \cdot Q_0^{\,2}}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g} = 9.057$$

$$\Rightarrow b_1' = \frac{a_1 - H_1}{Q_0^{\,2}} = 2934.896$$

Pero $\quad b_1' = b_1 + \dfrac{8 \cdot k_A}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g}$

De donde $\quad k_A = 31.6$ fin//