

4.7.2 Marcos o pórticos planos de nudos rígidos

Estas estructuras están formadas por elementos uniaxiales que se unen en forma rígida (unión interna soldada) la mayor parte de las veces.

En una unión rígida el ángulo que forman entre sí los elementos que concurren a la unión, en su estado descargado lo conservan las tangentes a la configuración deformada de los elementos que concurren al nudo.

Los elementos verticales que forman un marco se identifican como “columnas” y los elementos horizontales como “vigas”.

Comportamiento de las columnas de un marco.

Las columnas de un marco resisten las acciones externas del tipo gravitacional, debidas al peso propio y sobrecargas de uso, predominantemente por esfuerzo axial. En cambio las

acciones de cargas laterales (sismo, viento) las resisten además por momento de flexión y esfuerzo de corte.

Las columnas de un "marco equivalente" pueden ser de dos tipos:

- a. Elementos en que el alto de la sección transversal, dimensión de la sección transversal medida en el plano de las cargas, es menor o igual a tres veces el ancho de la sección transversal (ACI 318), dimensión de la sección transversal medida perpendicularmente al plano de las cargas.**

Este tipo de columna se identifica en la práctica como una columna propiamente tal o "pilar" y se caracteriza por ser un elemento esbelto.

- b. Elementos en que el alto de la sección transversal es mayor que tres veces su ancho.**

Este tipo de columna corresponde en la práctica a un "machón" o a un "muro" de una estructura resistente y se caracterizan por ser elementos de esbeltez reducida.

Al igual que un elemento del tipo viga, las deformaciones y el dimensionamiento de un elemento tipo columna queda controlado por el esfuerzo de corte y el momento de flexión de acuerdo con su esbeltez. La única diferencia está en que cualquiera sea la esbeltez de una columna, el esfuerzo axial es una sollicitación importante en su dimensionamiento.

■ *Clasificación de los marcos*

Entre los marcos planos se pueden distinguir:

- a. Marcos ortogonales: Las barras de estos marcos forman entre sí ángulos de 90° .
- b. Marcos oblicuos: Las barras de estos marcos forman entre sí ángulos diferentes de 90° .

■ **Análisis de marcos planos isostáticos**

a. **Cálculo de las reacciones en los apoyos**

Las reacciones en los apoyos de un marco isostático se determinan estableciendo las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de condición en el diagrama de cuerpo libre que resulta al liberar la estructura de sus apoyos externos.

Comentario:

- i. En el caso particular de los marcos hiperestáticos que tengan tres incógnitas de reacción, son suficientes las ecuaciones de equilibrio para determinar las reacciones. Es decir son marcos estáticamente determinados desde el punto de vista de sus reacciones.
- ii. Si hay más de dos barras que concurren a una unión rotulada, $N1 > 2$, se deben plantear $N1-1$ ecuaciones de condición (una por cada rótula simple que represente la unión)

b. Cálculo de la distribución de esfuerzos internos

Conocidas las reacciones de los apoyos externos, la distribución de esfuerzos internos se calcula utilizando el procedimiento estándar.

En la determinación la distribución de esfuerzos de los elementos del marco es conveniente aislar tanto los elementos como los nudos.

Estableciendo la condición de equilibrio en los nudos se relacionan los esfuerzos que actúan en las secciones vecinas al nudo de los elementos que concurren a él.

4.7.3 Enrejados planos

Los enrejados (o armaduras) son estructuras planas uniaxiales formadas por barras esbeltas (livianas) que se unen entre sí con rótulas lo que permiten cubrir grandes luces en forma económica.

Algunos ejemplos de enrejados isostáticos se muestran en las figuras adjuntas.

Enrejado de Tijera:



Enrejado tipo Howe:



En la práctica este tipo de estructura se utiliza principalmente como estructura de techumbre, en vigas enrejadas, torres de apoyo, entre otras.

Al actuar las acciones externas como fuerzas concentradas en los nudos (Fuerzas nodales), el enrejado resiste estas acciones sólo con esfuerzos axiales (Tracción o compresión) en las barras que lo forman.

La determinación de los esfuerzos axiales en las barras se realiza aceptando:

- i. Las uniones internas son rótulas perfectas.**
- ii. El peso propio de las barras no es determinante en el dimensionamiento de las barras, siendo los esfuerzos que produce esta carga de carácter secundario.**

Para incorporar el peso propio de las barras en el análisis del enrejado se acepta que este peso se concentra por partes iguales en los nudos a los que se conecta la barra, como se indica en la figura.

- iii. Los ejes centroidales de las barras que forman la estructura son rectos y concurrentes a la rótula que las une. Esta condición exige un buen detallamiento de fabricación y cuidado en el montaje para minimizar los efectos de cualquiera excentricidad.

De producirse esta excentricidad, los esfuerzos derivados de ellas no son cuantificados por los métodos de análisis que se presentan.

En la construcción de un enrejado se usan barras esbeltas, de esta forma deben controlarse en su diseño los efectos de inestabilidad (pandeo) que presentan este tipo de barra cuando están sometidas a una fuerza de compresión axial.

Debe tenerse presente que aunque los enrejados son muy rígidos en su propio plano, ellos son muy flexibles fuera de él lo que obliga a arriostrarlos (apoyarlos) lateralmente.

Al aislar una barra de un enrejado, el diagrama de cuerpo libre está constituido por dos fuerzas colineales de igual magnitud y sentido opuesto que actúan en los extremos de la

barra. Cualquiera de estas fuerzas representa el esfuerzo axial que actúa en cualquier sección transversal a lo largo de la barra. Teniendo en cuenta la convención de signos recomendada en este curso, se debe tener en cuenta que un esfuerzo axial de tracción es positivo.

Los esfuerzos axiales en las secciones ubicadas en los extremos de una barra se muestran en la figura adjunta.

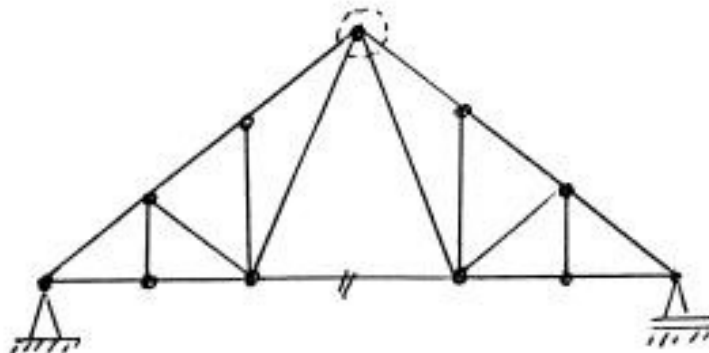
■ **Clasificación de los enrejados planos**

Los enrejados planos se clasifican en:

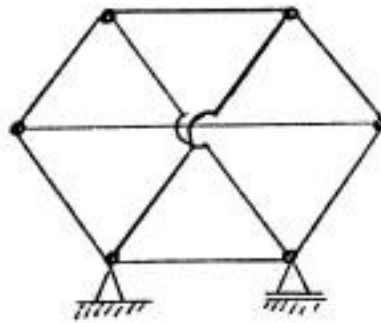
- i. **Enrejados simples**: Son aquellos en que cada nudo se une con otros dos por medio de un par de barras.



- ii. **Enrejados compuestos**: Son aquellos que resultan de la unión de dos enrejados simples mediante: tres barras no concurrentes ni paralelas, por una rótula y una barra o por tres rótulas no colineales.



- iii. **Enrejados complejos:** Son aquellos que no pueden clasificarse en ninguno de los dos tipos anteriores.



■ **Análisis de enrejados isostáticos**

a. **Cálculo de reacciones**

Para determinar las fuerzas de reacción en los apoyos de un enrejado se aplican la condición de equilibrio en el diagrama de cuerpo libre que resulta al liberar la estructura de sus apoyos. Este procedimiento se aplica a cualquier enrejado externamente isostático, es decir en cualquier enrejado plano en que V_{ap} es igual a 3.

Para calcular las reacciones de un enrejado no es necesario calcular las fuerzas axiales de las barras.

b. Cálculo de los esfuerzos axiales de las barras

En los enrejados sometidos a un sistema de cargas externas representado por fuerzas nodales, los esfuerzos axiales de las barras se determinan manualmente aplicando el método de los nudos y el método de las secciones o bien una combinación de ellos.

Independiente del método que se use es conveniente asignar a las barras una identificación, por ejemplo un número de identificación, y a los nudos una identificación, por ejemplo una letra de identificación.

Considerando que no se conocen a priori el sentido de las fuerzas axiales de las barras, se supone que todas ellas están traccionadas, es decir la barra tira del nudo al cual concurre en una representación del diagrama de cuerpo libre del nudo. Si el resultado del análisis es un valor positivo para la fuerza axial,

significa que el sentido asignado es el correcto y si no es así quiere decir que la barra está comprimida.

■ **Método de los nudos**

Este método se desarrolla aplicando la condición de equilibrio al diagrama de cuerpo libre que resulta al aislar los nudos de la estructura.

El sistema de fuerzas que resulta es concurrente, formado por las fuerzas externas que se aplican directamente sobre el nudo y por las fuerzas axiales que ejercen las barras que concurren al nudo.

Para aplicar el método se debe comenzar con cualquier nudo en que su diagrama de cuerpo libre tenga a lo más dos incógnitas, continuando en forma sucesiva con los nudos en los que se cumpla esta condición. La verificación de la condición de equilibrio en el último nudo, sirve para verificar los cálculos realizados para determinar las fuerzas axiales de las barras

Este método es la aplicación directa de la condición de equilibrio a una de las porciones que resulta al hacer un corte imaginario del enrejado.

El sistema de fuerzas de estas porciones está formado por las fuerzas nodales que actúan directamente en los nudos que pertenecen a la porción, por las fuerzas de reacción de los apoyos ubicados en la porción y por las fuerzas axiales de las barras que corta el corte imaginario.

Teniendo en cuenta que en un sistema de fuerzas coplanar no concurrente se pueden establecer tres ecuaciones de equilibrio, el corte imaginario no debe comprometer más de tres barras en las que las fuerzas axiales sean desconocidas.

La ventaja de este método es que permite calcular en forma directa, y por lo tanto rápida, la fuerza axial de una barra sin necesidad de calcular en forma previa la fuerza axial en otras barras que no interesan, como debe hacerse cuando se aplica el método de los nudos.

■ **Barras no solicitadas**

Caso 1: Si un nudo al cual concurren dos barras está descargado, la fuerza axial en las barras es nula.



Caso 2: Si un nudo al cual concurren tres barras y dos de las cuales son colineales está descargado, la fuerza en la barra que no es colineal es cero.



4.7.4 Arcos

El arco es un elemento curvo que soporta las acciones externas principalmente por fuerza axial de compresión, existiendo estados de cargas para los cuales un arco de una geometría determinada sólo se ve solicitado a este tipo de esfuerzo axial.

Además se caracterizan por que el radio de curvatura de los elementos que lo forman es muy grande comparado con la altura de la sección transversal del elemento así el efecto de la curvatura puede ser despreciado en la ubicación del eje neutro del elemento.

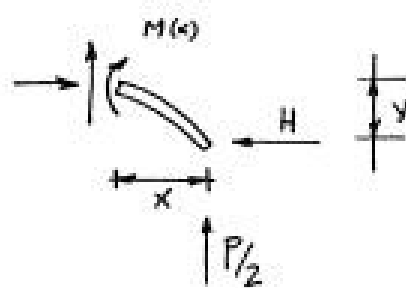
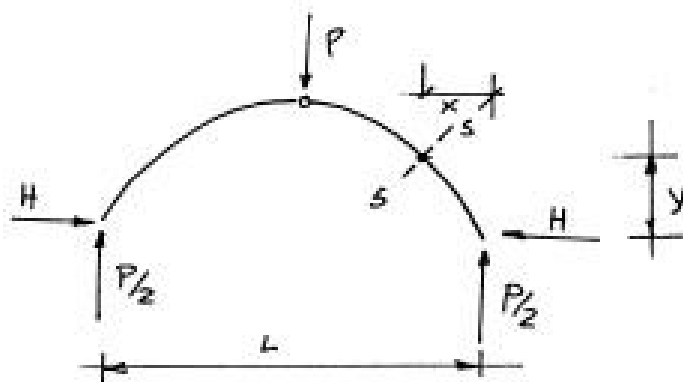
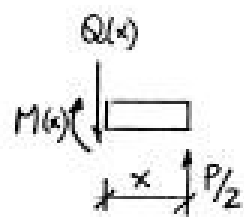
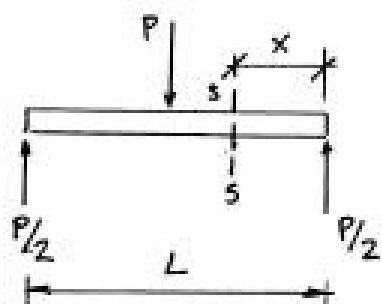
Este tipo de estructura se usa para cubrir grandes luces como es el caso de puentes, hangares para mantención de aviones, laboratorios de ensayos y modelos (Hidráulica U. de Chile), hall de centros comerciales, salas de reuniones, etc.

En general, un arco tiende a tener momentos internos más pequeños que los encontrados en vigas y en marcos que cubren las mismas luces.

Para lograr un estado de esfuerzo axial puro bajo un sistema de carga particular el arco debe tener una forma determinada, llamada forma funicular. Es importante tener presente que el perfil del arco siempre se puede ajustar para minimizar los momentos de flexión para una carga en particular, aún cuando esto no asegura que serán minimizados para otra distribución de cargas.

Los arcos se clasifican teniendo en cuenta el número de rótulas que poseen y por la forma en que se apoya, de este modo se identifican los arcos: triarticulados, birotulados y empotrados. El más popular es el arco con tres articulaciones, este arco es estáticamente determinado y por esta característica los cambios de temperatura, los asentamientos de apoyo y los errores de fabricación no producen esfuerzos internos.

Para comprobar que los arcos tienen momentos de flexión pequeños en comparación con los marcos o las vigas, basta con considerar el estado de esfuerzos internos en un punto cualquiera distante x del apoyo derecho.

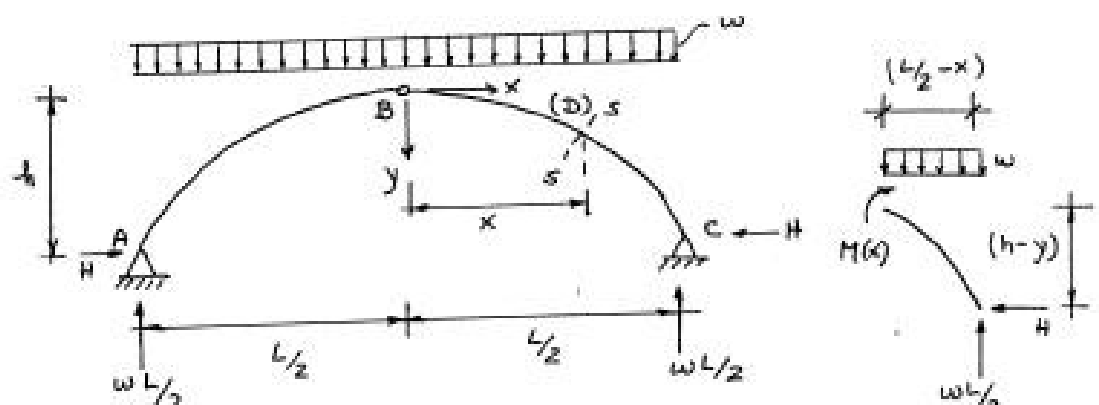


En el caso de la viga, el momento en el punto debido a la carga P es: $M = P \cdot x / 2$, en cambio en el arco la reacción horizontal H tiende a contrarrestar el momento inducido por la fuerza vertical, reduciéndolo, resultando igual a: $M = P \cdot x / 2 - H \cdot y$

4.7.4.1. Forma funicular de un arco triarticulado que soporta una carga distribuida uniformemente.

Para determinar la función que define esta "funicular" basta con establecer la ecuación del momento de flexión en cualquier sección transversal del arco e imponer la condición que éste debe ser igual a cero.

Escogiendo un sistema de ejes como el mostrado en la figura, para una sección transversal cualquiera D se cumple por equilibrio de momento:



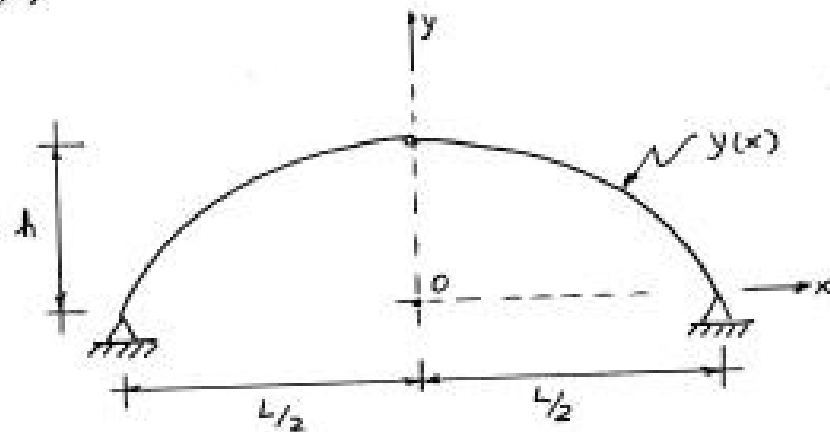
ecuaciones de equilibrio y de condición en el diagrama de cuerpo libre que resulta.

4.7.4.3 Cálculo de los esfuerzos internos de un arco isostático simple

i. Para determinar las fuerzas internas en una sección transversal del arco se debe conocer la geometría del arco, es decir la función que define la curva que modela el eje centroidal de la estructura.

En el caso de un arco parabólico triarticulado, para el sistema de coordenadas mostrado la ecuación del arco es:

$$y = h \{1 - 4 (x/L)^2\}$$



ii. Para el análisis del estado de esfuerzos se debe considerar que la fuerza axial actúa en la dirección de la tangente al arco y

la fuerza de corte en la dirección perpendicular a la tangente al arco, es decir para un arco circular esta dirección corresponde a la dirección radial.

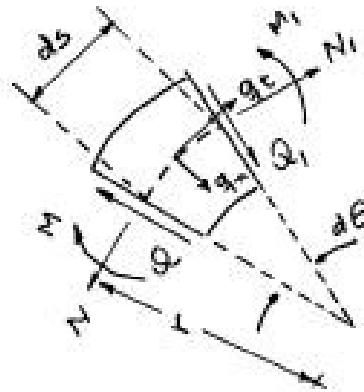
iii. Las relaciones entre las componentes del estado de esfuerzos, determinadas por el equilibrio de un tramo ds en la dirección de la normal y de la tangente, resultan:

$$N + r \, dQ/ds = - r \, q_n$$

$$Q - r \, dN/ds = r \, q_t$$

$$Q = dM/ds$$

donde $ds = r \, d\theta$

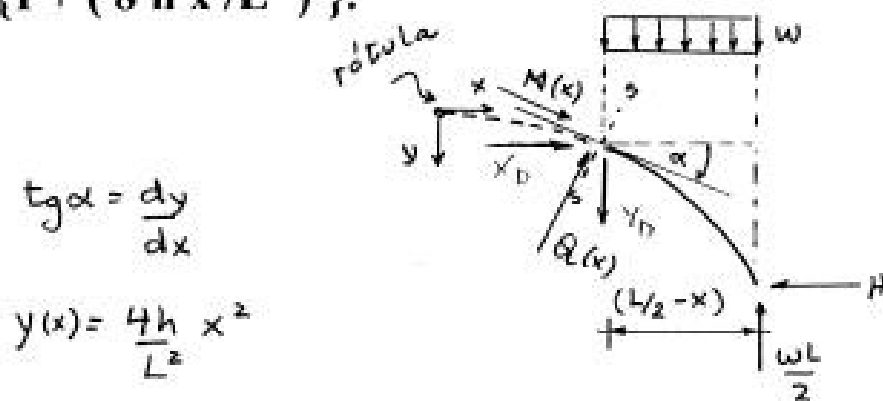


iv. En la medida que la geometría del arco se complique, la determinación de la distribución de esfuerzos internos obliga a calcular la pendiente del arco $dy / dx = \text{tag} (\alpha)$. Para arcos circulares la situación se simplifica si se trabaja en coordenadas polares.

v. En el caso particular de un arco triarticulado parabólico sometido a una carga uniformemente distribuida, en una

sección cualquiera el esfuerzo de corte es nulo y el esfuerzo axial es una fuerza de compresión cuya magnitud es:

$$N = H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{8 h x}{L^2} \right)^2}.$$



Para comprobar estos valores, basta con considerar que en una sección cualquiera actúa una fuerza horizontal igual a:

$$X_D = H = w L^2 / (8 h)$$

y una fuerza vertical:

$$Y_D = w \cdot x$$

Descomponiendo en la dirección de la tangente y de la normal a la tangente se tiene:

$$N = X_D \cos (\alpha) + Y_D \sen (\alpha)$$

considerando que:

$$\cos (\alpha) = 1 / \sqrt{\{1 + \operatorname{tag}^2 (\alpha)\}}$$

$$\operatorname{sen} (\alpha) = \operatorname{tag} (\alpha) * \cos (\alpha)$$

$$\operatorname{tag} (\alpha) = dy / dx = 8h x / L^2$$

se obtiene:

$$Q = \{w L^2 / (8h)\} * (8hx / L^2) * \cos (\alpha) - w * x \cos (\alpha)$$

$$\underline{Q = 0}$$

$$\begin{aligned} N &= \{w * L^2 / (8h)\} \cos (\alpha) + w * x \operatorname{tag} (\alpha) * \cos (\alpha) \\ &= w * \cos (\alpha) \{L^2 / (8h) + x (8h * x / L^2)\} \end{aligned}$$

$$N = (w L^2 / (8h)) * \cos (\alpha) \{1 + (8h x / L^2)^2\}$$

$$\underline{N = (w L^2 / (8h)) * \sqrt{\{(1 + (8h x / L^2)^2)\}}}$$

(su valor máximo se produce para $x = L/2$, es decir en apoyo)

- vi. En relación con la representación de los diagramas de esfuerzos internos, se debe reconocer que se encuentran algunas dificultades en este tipo de sistema. Estas dificultades no se encuentran en el caso de sistemas formados por elementos rectos.

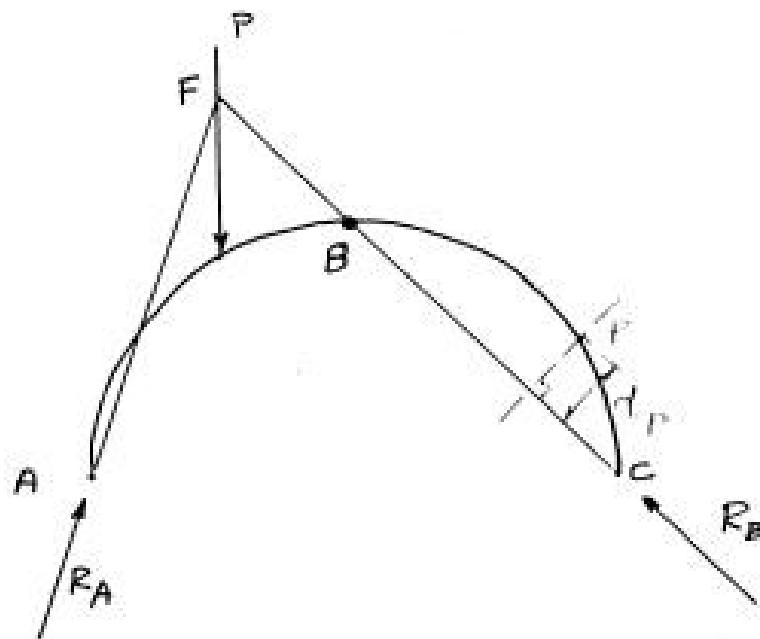
Entre estas dificultades se destacan las siguientes:

1. La dirección del eje del elemento cambia a lo largo de su longitud. Así la fuerza axial y la fuerza de corte en cualquier sección dependen del ángulo entre la línea horizontal y la tangente a la curva en la posición.
2. La línea base para representar los diagramas es una curva en vez de una línea recta.

Teniendo en cuenta lo anterior, es conveniente tener en cuenta que en un arco triarticulado sometido a cargas externas verticales, se cumple:

- a. La componente horizontal de las fuerzas que actúan en cualquier sección del arco es constante, y

- b. La componente vertical de las fuerzas que actúan en cualquier sección del arco varía y tal variación queda representada por la variación de las fuerzas verticales a lo largo de la proyección horizontal.
- c. Cuando actúa una sola fuerza externa vertical concentrada, el diagrama de momento varía de acuerdo con la distancia del punto del arco donde se determina el momento a la línea AF o CF.



d. Para un arco parabólico simétrico sometido a una carga vertical distribuida uniformemente sobre la proyección horizontal, en cualquier sección transversal el momento de flexión y el esfuerzo de corte es cero. En este tipo de estructura sólo existen fuerzas axiales en las secciones transversales.

e. En términos generales, el término “acción de arco” se refiere a la tendencia de un sistema estructural a desarrollar resistencia horizontal en sus apoyos cuando se somete a cargas verticales.

Un arco se puede definir como: “un elemento curvo que presenta reacciones horizontales que apuntan hacia el interior bajo cargas verticales”.

Esta características del arco destaca la importancia de tener un adecuado apoyo en este tipo de estructura.

4.7.5 Cables

a. Los cables son usados para construir estructuras de grandes luces como puentes colgantes y cubiertas de recintos que albergan grandes cantidades de espectadores como son estadios techados.

b. Las estructuras de cable son estructuras flexibles que sólo pueden resistir fuerzas axiales de tracción, fuerza que está dirigida según la tangente al cable.

c. La forma que adquiere un cable sometido a cargas externas depende del tipo de carga que actúa sobre él.

Por ejemplo un cable cargado uniformemente a lo largo de su luz horizontal toma la forma de una parábola en cambio el mismo cable soportando su propio peso toma la forma de una catenaria.

d. La forma de un cable está determinada únicamente por las condiciones de equilibrio y por la condición de que en cualquier punto el momento de flexión es nulo.

e. En el diseño de una estructura con cables se deben cuidar principalmente dos aspectos:

- Controlar los desplazamientos y las oscilaciones que pudieran ocurrir por efecto de cargas cuya magnitud y sentido cambien con el tiempo.

- **Proporcionar los anclajes necesarios para resistir las grandes fuerzas que se producen en los apoyos.**

4.5.7.1 Análisis de cables

Para realizar el análisis de un cable basta con conocer:

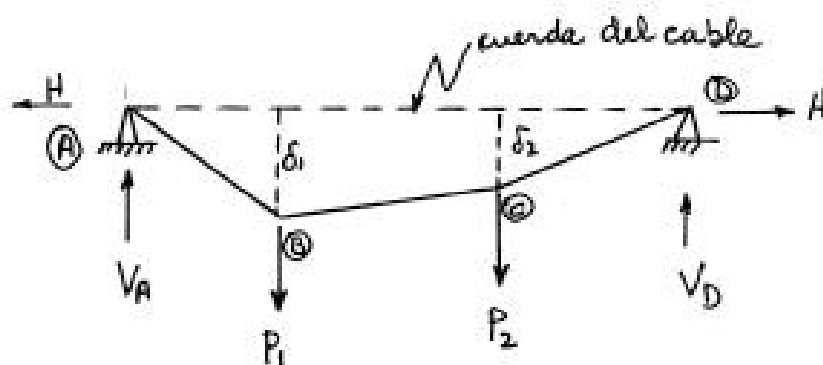
- la posición de los apoyos,**
- la magnitud de las cargas aplicadas y**
- la elevación algún punto del cable, por ejemplo la flecha al centro del cable.**

Basado en estos antecedentes, el análisis de un cable consiste en determinar:

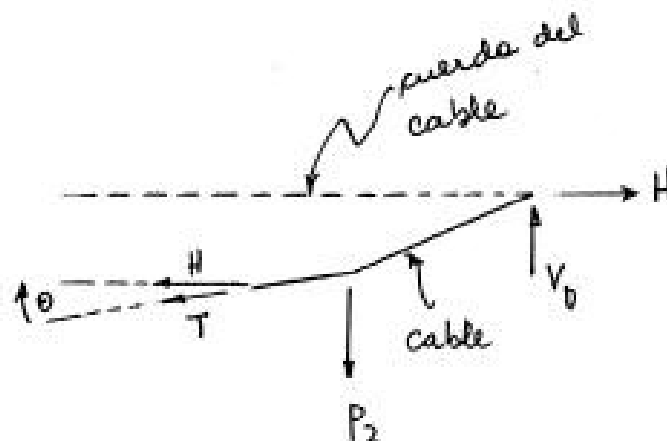
- las reacciones en los apoyos,**
- la fuerza en el cable en cualquier punto de él, y**
- la posición del resto de los puntos a lo largo del cable.**

Análisis de cables que soportan cargas verticales

El tipo de carga más frecuente de encontrar en este tipo de estructura corresponde a las cargas verticales de tipo gravitacional (cargas verticales).



- En un cable que soporta cargas de tipo gravitacional (verticales), la componente horizontal de la fuerza de tracción, H , es constante a lo largo del cable. Esto se comprueba aplicando la condición de equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal en una porción del cable, por ejemplo:



Si se designa por T a la fuerza de tracción en el cable y por H a su componente horizontal, la expresión que las relaciona es:

$$T = H / \cos (\theta)$$

Donde:

θ : ángulo de inclinación del cable con respecto a la horizontal.

De esta expresión es importante destacar que:

- **Para $\theta = 0$ se cumple que $H = T$**
- **Para $\theta_{\max}$ (en los apoyos), se obtiene el valor máximo de la tensión T en el cable.**
- **Cuando las fuerzas verticales son un conjunto de fuerzas concentradas, un cable de peso despreciable se deforma en una serie de tramos rectos (Polígono funicular).**