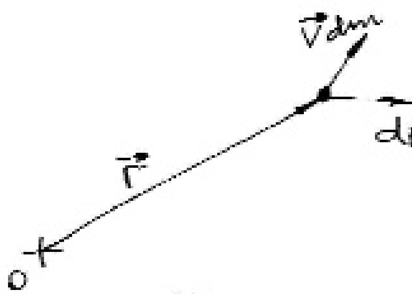
CI31A – MECÁNICA DE FLUIDOS
Prof. ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

TEOREMA DEL MOMENTO DEL MOMENTUM



En el elemento de fluido de masa dm y velocidad $\vec{V}$ se cumple que:

$$d\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{V}dm) \qquad (1)$$

Tomemos momento respecto a O:

$$\vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(\vec{V}dm) \qquad (2)$$

Pero $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{V}dm) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V}dm + \vec{r} \times \frac{d(\vec{V}dm)}{dt}$

Además $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V}dm = \vec{V} \times \vec{V}dm = 0$

$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{V}dm) = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(\vec{V}dm)$

Ec. 2 $\Rightarrow \quad \vec{r} \times d\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{V}dm) \qquad (3)$

La Ec. 3 es válida para un elemento de fluido. Extendámosla a todo el sistema de partículas!

$$\int_{\forall_c} \vec{r} \times d\vec{F} = \int_{\forall_c} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{V}dm) = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \vec{r} \times \vec{V}dm$$

Integramos sobre las fuerzas que actúan en el volumen de control $\forall_c$

Sacamos $\frac{d}{dt}$ de la integral ya que el $\forall_c$ es fijo en el espacio (no varía)

$$\int_{\forall_c} \vec{r} \times d\vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \vec{r} \times \vec{V} \rho \, d\forall$$

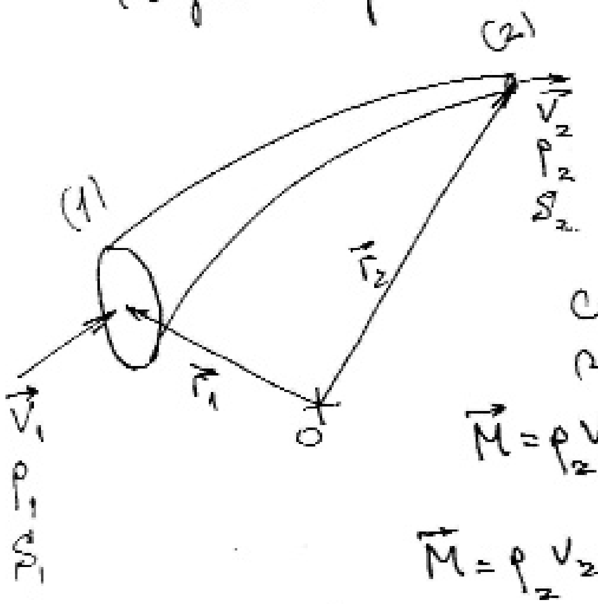
Pero $\int_{\forall_c} \vec{r} \times d\vec{F}$ es el momento resultante que actúa sobre el volumen de control: $\vec{M}$

$$\therefore \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \vec{r} \times \vec{V} \rho \, d\forall$$

Apliquemos el Teorema del Transporte de Reynolds a la ecuación anterior. En este caso $\eta = \vec{r} \times \vec{V}$ y $\frac{dN}{dt} = \vec{M}$

$$\therefore \vec{M} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_c} \vec{r} \times \vec{V} \rho \, d\forall + \int_S \vec{r} \times \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS \qquad (4)$$

Apliquemos la Ec. 4 a un tubo de flujo en régimen permanente:



$$\vec{M} = \int_S \vec{r} \times \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS$$

$$\vec{M} = \int_{S_2} \vec{r} \times \vec{V}_2 \rho_2 V_2 \, dS - \int_{S_1} \vec{r} \times \vec{V}_1 \rho_1 V_1 \, dS$$

Considerando que V y ρ son constantes en cada sección

$$\vec{M} = \rho_2 V_2 \left(\int_{S_2} \vec{r} \, dS\right) \times \vec{V}_2 - \rho_1 V_1 \left(\int_{S_1} \vec{r} \, dS\right) \times \vec{V}_1$$

$$\vec{M} = \rho_2 V_2 S_2 \, \vec{r}_2 \times \vec{V}_2 - \rho_1 V_1 S_1 \, \vec{r}_1 \times \vec{V}_1$$

El gasto másico está dado por $G = \rho V S$.
Considerando que el tubo de flujo tiene una entrada y una salida:

$$G_1 = G_2 = G$$

$$\therefore \quad \vec{M} = G\left(\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{V}_1\right)$$

$$\text{o} \quad \underline{\underline{\vec{M} = \rho Q \, \Delta(\vec{r} \times \vec{V})}}$$

Si el tubo de flujo tiene varias entradas o salidas, es fácil ver que el teorema del momento del momentum es:

$$\boxed{\vec{M} = \sum_{\text{SALE}} \rho Q \, \vec{r} \times \vec{V} - \sum_{\text{ENTRA}} \rho Q \, \vec{r} \times \vec{V}}$$