CI31A – Mecánica de Fluidos

Prof. Aldo Tamburrino Tavantzis

Dinámica de los Fluidos

Aplicación de la Segunda Ley de Newton al Movimiento de los Fluidos:

Teorema de la Cantidad de Movimiento

SEGUNDA LEY DE NEWTON

En forma general, la segunda ley de Newton se escribe:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

En dos dimensiones, tiene componentes según x e y:

$$F_x = ma_x$$

$$F_y = ma_y$$

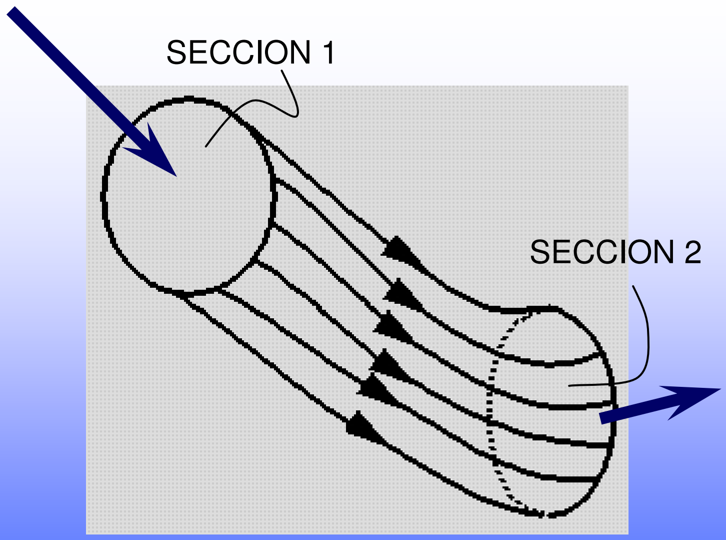
TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Al aplicar la segunda ley de Newton a un fluido, debemos considerar la *masa por unidad de tiempo*, o sea el *gasto másico*:

$$\frac{m}{t} = G = \rho Q$$

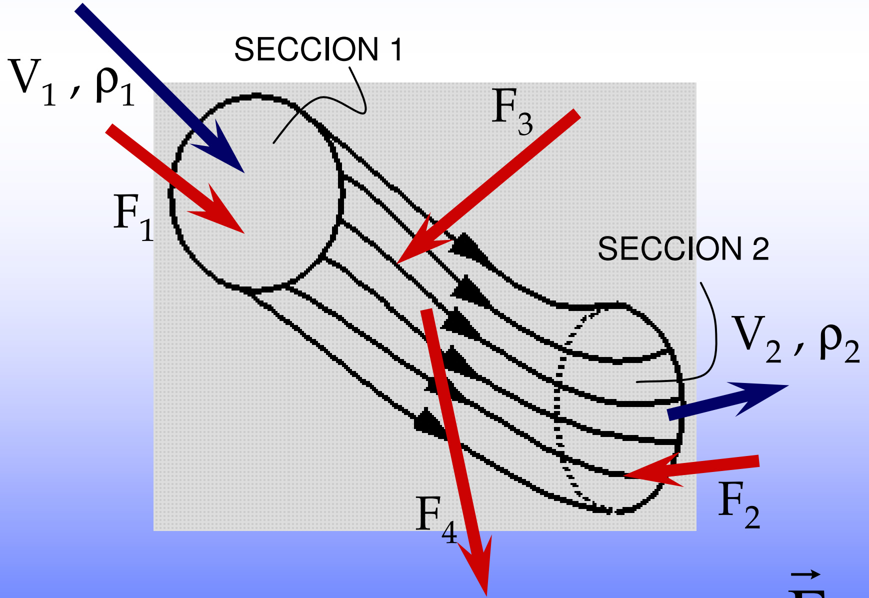
Cuando trabajamos con fluidos, aplicamos la segunda ley de Newton a un *volumen de control*.

Podemos considerar como volumen de control a un tubo de flujo:



TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

El volumen de control de la figura tiene una entrada (sección 1) y una salida (sección 2). Sobre el volumen de control actúan fuerzas superficiales y másicas: F_1, F_2, F_3, ……..



En la sección 1 se tiene el flujo tiene velocidad V_1 y en la sección 2, V_2.

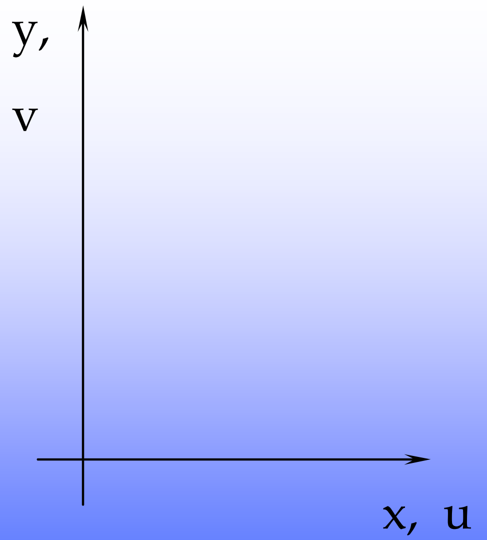
Para el flujo permanente de un fluido Incompresible, la segunda ley de Newton se escribe como:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \rho Q\left(\vec{V}_{sale} - \vec{V}_{entra}\right)$$

TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \rho Q\left(\vec{V}_{sale} - \vec{V}_{entra}\right)$$

En un sistema de coordenadas (x, y):



según x:

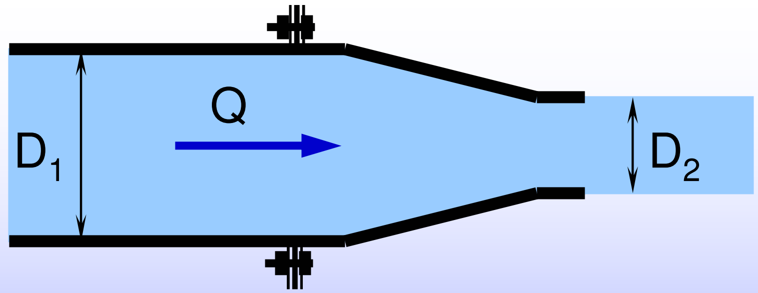
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots = \rho Q\left(u_{sale} - u_{entra}\right)$$

según y:

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots = \rho Q\left(v_{sale} - v_{entra}\right)$$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

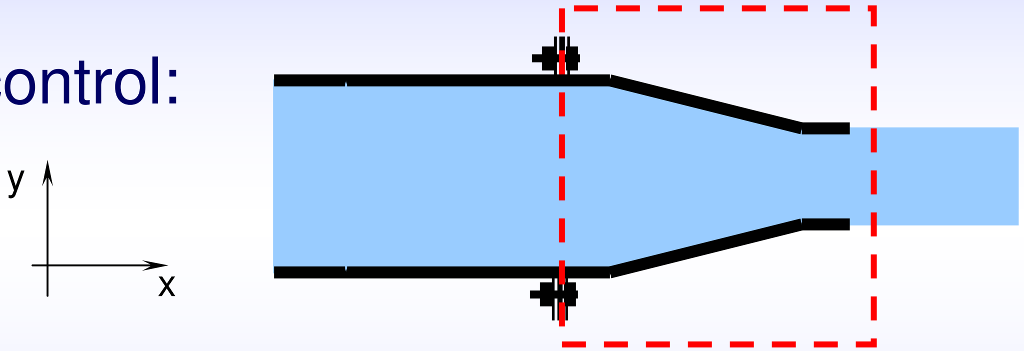
Determinar la fuerza que resisten los pernos de la boquilla de una tubería que descarga a la atmósfera un caudal Q.



Lo primero que debemos hacer es *definir el volumen de control.*

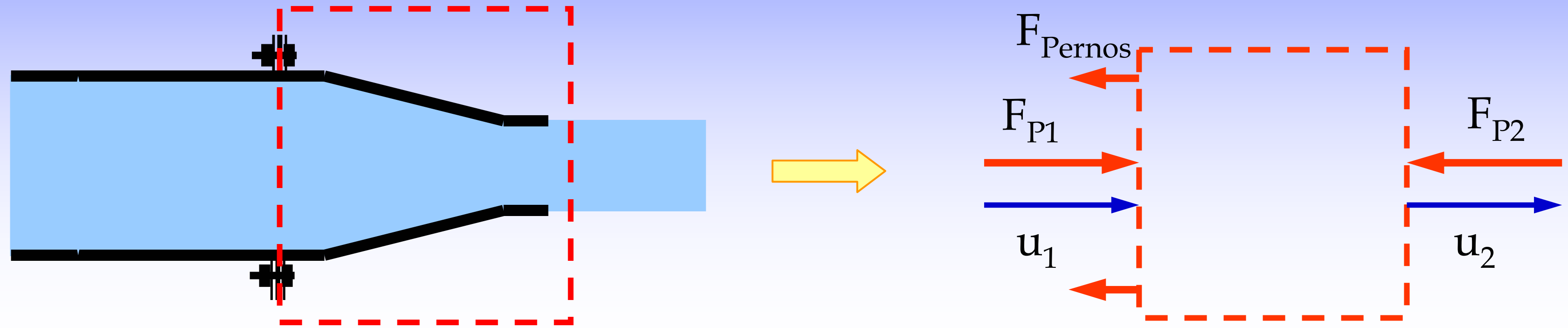
APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Volumen de control:



Analicemos las fuerzas y flujos actuando sobre el volumen de control. Para determinar la fuerza que están resistiendo los pernos, nos interesa la componente según x:

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

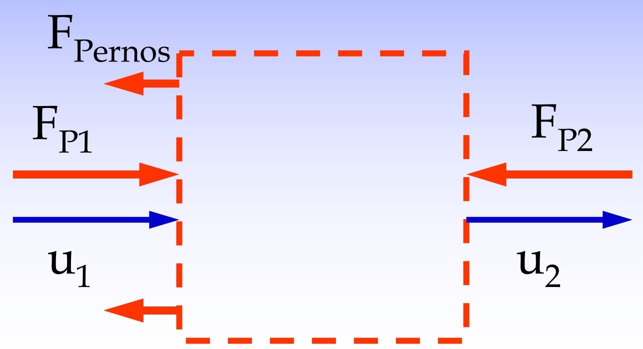


TCM según x: $F_{P1} - F_{P2} - F_{Pernos} = \rho Q(u_2 - u_1)$

F_{P1} = Fuerza de presión en la sección 1 = p_1A_1
F_{P2} = Fuerza de presión en la sección 2 = p_2A_2

Trabajando con presiones relativas: $p_2 = 0$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO



$$F_{P1} - F_{P2} - F_{Pernos} = \rho Q(u_2 - u_1)$$

$$p_1A_1 - F_{Pernos} = \rho Q(u_2 - u_1)$$

Debemos determinar u_1, u_2, p_1:

Continuidad: $Q = u_1A_1 = u_2A_2 \quad \rightarrow \quad u_1 = Q/A_1 \ , \ u_2 = Q/A_2$

Las áreas de escurrimiento están dadas por: $A_1 = \pi D_1^2/4 \ , \ A_2 = \pi D_2^2/4$

Luego, las velocidades son: $u_1 = \dfrac{4Q}{\pi D_1^2} \quad , \quad u_2 = \dfrac{4Q}{\pi D_2^2}$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Nos falta determinar la presión p_1.

Para ello, apliquemos el Bernoulli entre las secciones 1 y 2:

$$B_1 = B_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$p_1 = \gamma\left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}\right) = \frac{\rho g}{2g}\left(u_2^2 - u_2^2\right)$$

$$p_1 = \frac{\rho}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right)$$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Reemplazando la presión p_1 en la ecuación del TCM: $p_1 A_1 - F_{Pernos} = \rho Q(u_2 - u_1)$

$$F_{Pernos} = F_{P1} - \rho Q(u_2 - u_1)$$

$$F_{Pernos} = p_1 A_1 - \rho u_1 A_1 (u_2 - u_1)$$

$$F_{Pernos} = \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_1^2)A_1 - \rho u_1 A_1 (u_2 - u_1)$$

$$F_{Pernos} = \frac{\rho A_1}{2}\left((u_2^2 - u_1^2) - 2u_1(u_2 - u_1)\right)$$

$$F_{Pernos} = \frac{\rho A_1}{2}\left(u_2^2 - u_1^2 - 2u_1 u_2 + 2u_1^2\right)$$

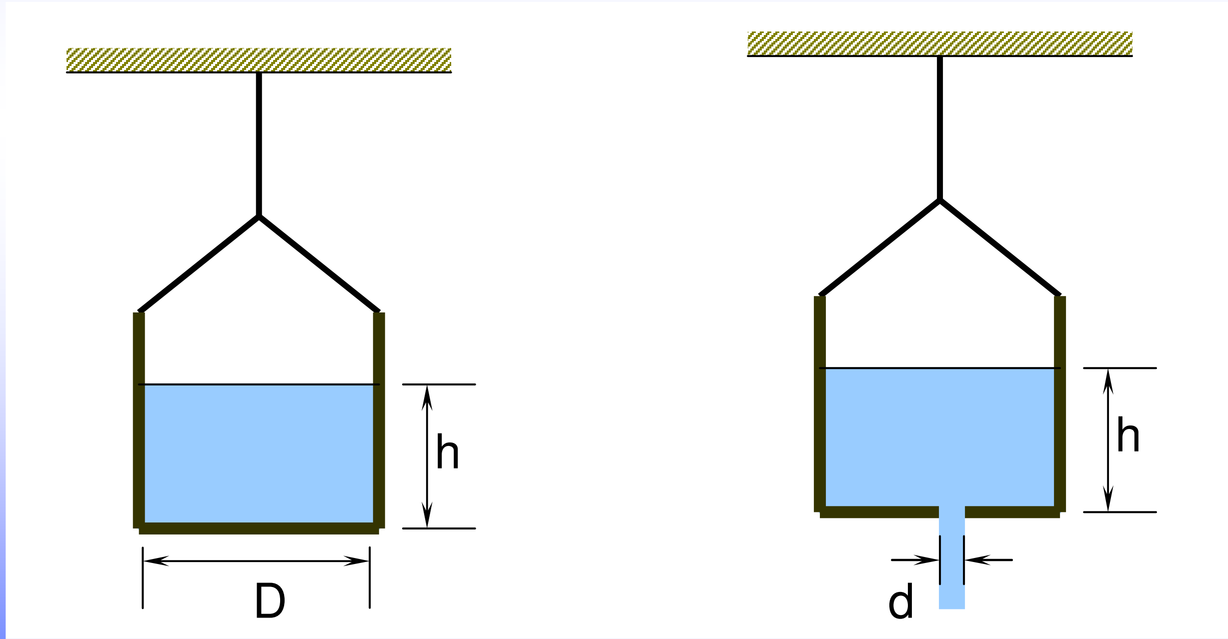
$$F_{Pernos} = \frac{\rho A_1}{2}\left(u_2^2 - 2u_1 u_2 + u_1^2\right)$$

$$\boxed{F_{Pernos} = \frac{\rho A_1}{2}(u_2 - u_1)^2}$$

$$u_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2}, \quad u_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2}, \quad A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$$

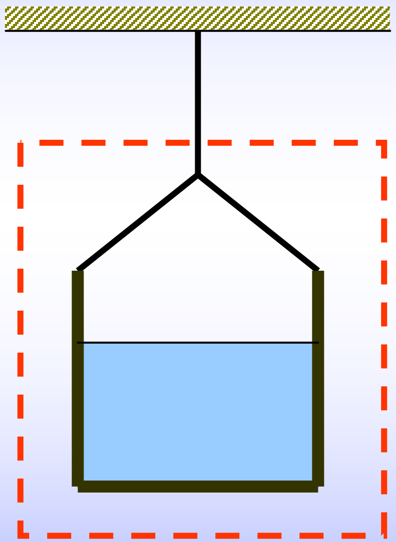
APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Un estanque de diámetro D que contiene un líquido de densidad ρ cuelga de un cable. Determinar la tensión del cable cuando en el fondo del estanque existe un orificio por el que sale un chorro de diámetro d.

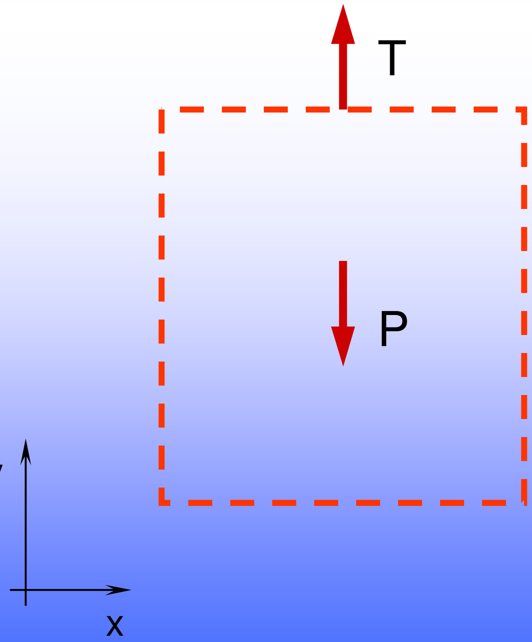


APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Tensión del cable para el estanque sin orificio:



Para el volumen de control de la figura, analicemos las fuerzas verticales (dirección y):



$$T - P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = P$$

$$P = mg = \rho V g$$

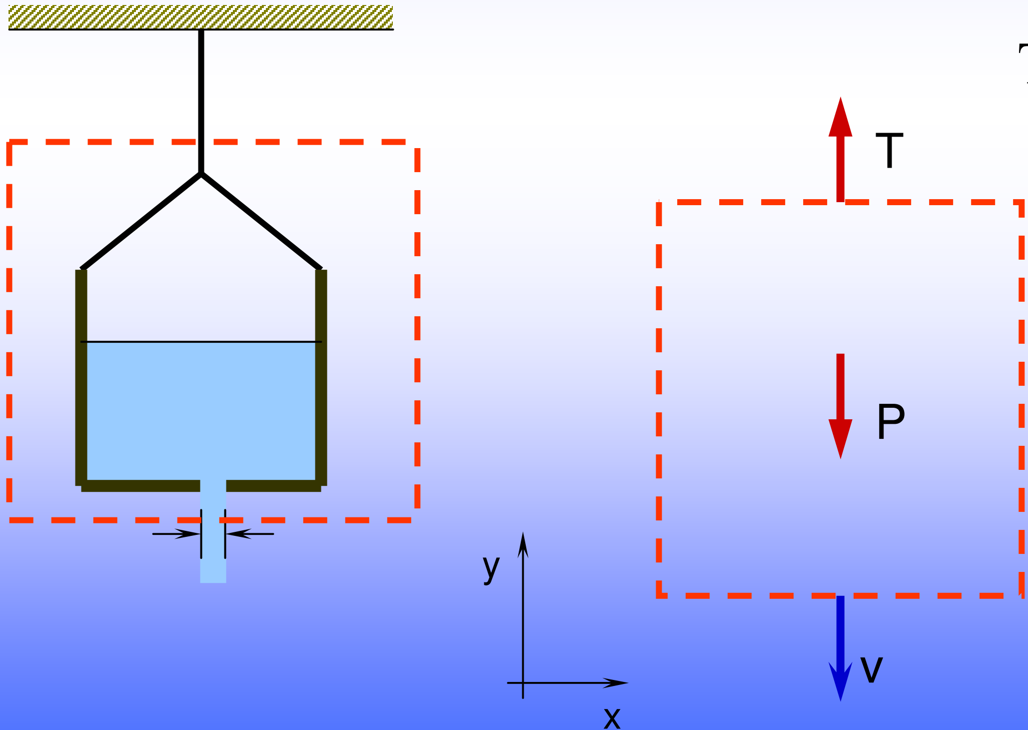
$$V = \frac{\pi}{4} D^2 h$$

$$P = \rho g \frac{\pi}{4} D^2 h$$

$$\boxed{T = \rho g \frac{\pi}{4} D^2 h}$$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Tensión del cable para el estanque con orificio:



Para el volumen de control de la figura, apliquemos el TCM en la dirección vertical (dirección y):

$$T - P = \rho Q\left(v_{sale} - v_{entra}\right)$$

$$P = mg = \rho g \frac{\pi}{4} D^2 h$$

$$v_{sale} = -v$$

Dirección opuesta a y

$$v_{entra} = 0$$

$$Q = v\boxed{\frac{\pi}{4} d^2}$$

Area del chorro

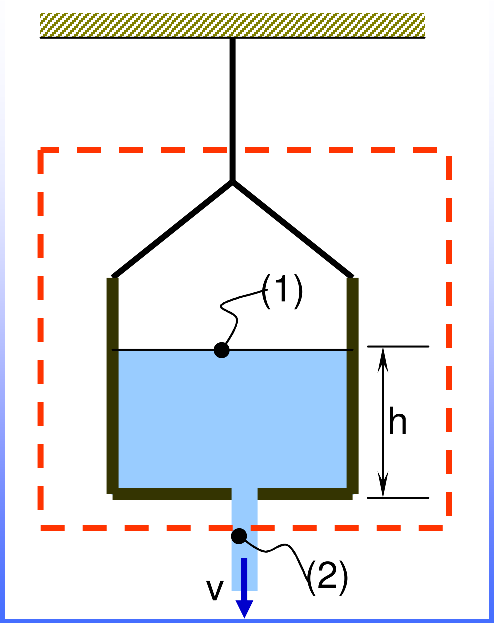
$$T = P - \rho \frac{\pi}{4} d^2 v^2$$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$T = P - \rho \frac{\pi}{4} d^2 v^2$$

Debemos determinar la velocidad con que sale el chorro (v).

Apliquemos Bernoulli entre (1) y (2) y trabajemos con presiones relativas;

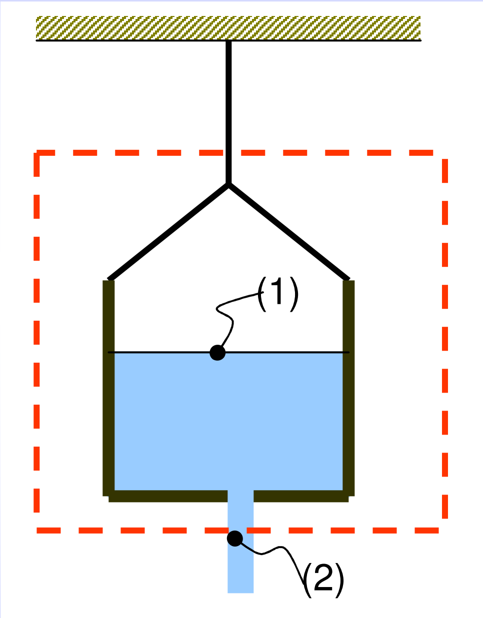


$$B_1 = B_2$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO



$$T = P - \rho \frac{\pi}{4} d^2 v^2$$

$$T = \rho g \frac{\pi}{4} D^2 h - \rho \frac{\pi}{4} d^2 v^2$$

$$T = \rho \frac{\pi}{4}\left(g D^2 h - d^2 v^2\right) = \rho \frac{\pi}{4}\left(g D^2 h - d^2 2gh\right)$$

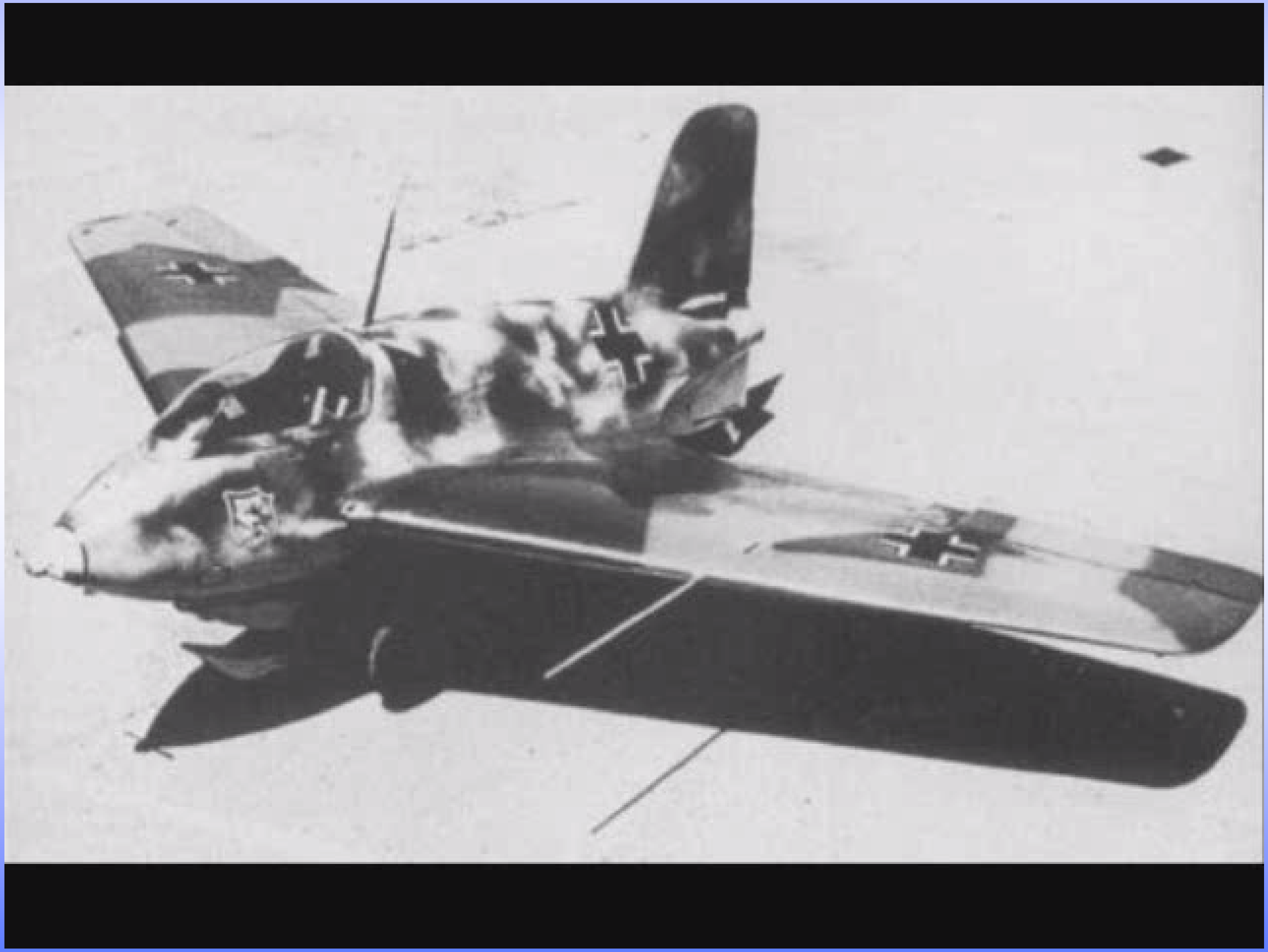
$$\boxed{T = \rho \frac{\pi}{4} g h\left(D^2 - 2d^2\right)}$$

La tensión es menor que cuando no sale líquido

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

1943

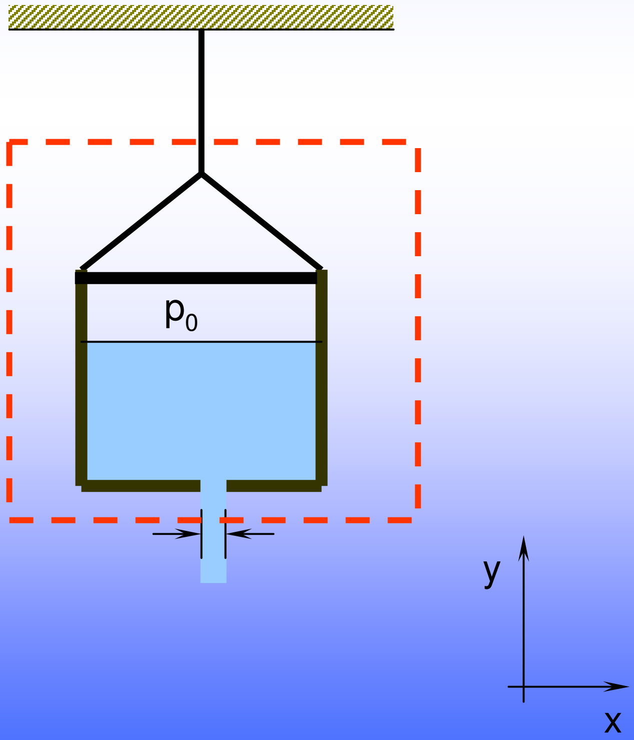
APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

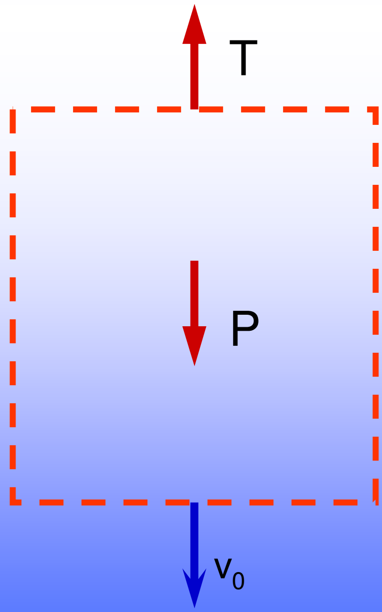


APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

¿Cómo cambia la tensión si el estanque está cerrado y el aire está a una presión relativa p_0?

El TCM no cambia.





$$T - P = \rho Q\left(v_{sale} - v_{entra}\right)$$

$$T = P - \rho \frac{\pi}{4} d^2 v_0^2$$

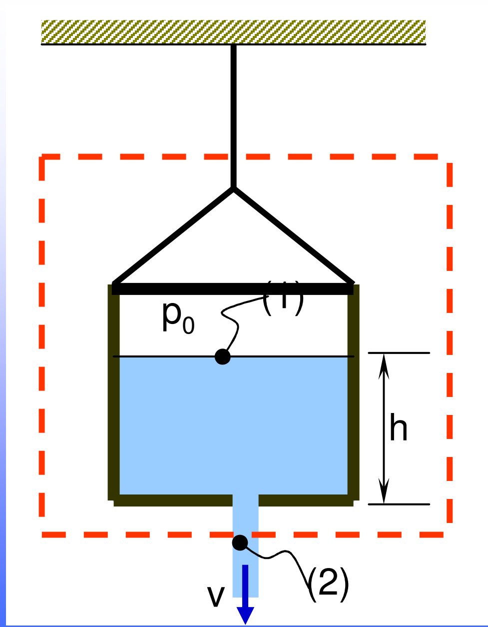
APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$T = P - \rho \frac{\pi}{4} d^2 v_0^2$$

Cambia la velocidad con que sale el chorro (v).

Apliquemos Bernoulli entre (1) y (2) y trabajemos con presiones relativas;

$$B_1 = B_2$$



$$h + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$v_0 = \sqrt{2gh + 2\frac{p_0}{\rho}}$$

La velocidad v_0 es mayor que en el caso anterior, por lo que la tensión del cable es menor.

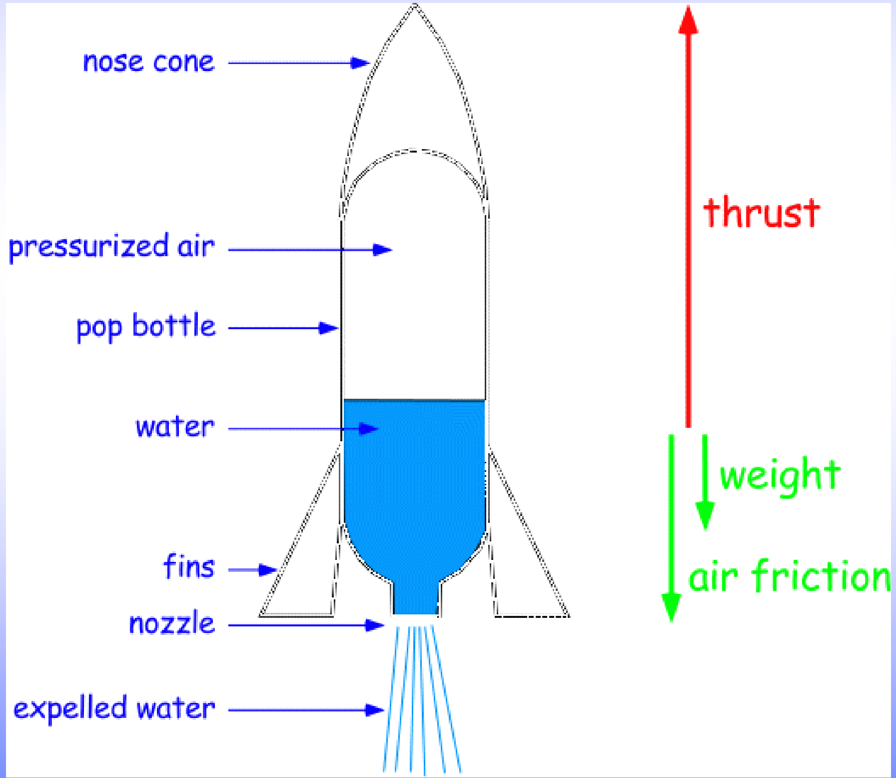
Incluso, el cable podría no estar tenso si p_0 es lo suficientemente grande.

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

COHETE DE AGUA

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

¿Por qué usar agua y no sólo aire a presión?



APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

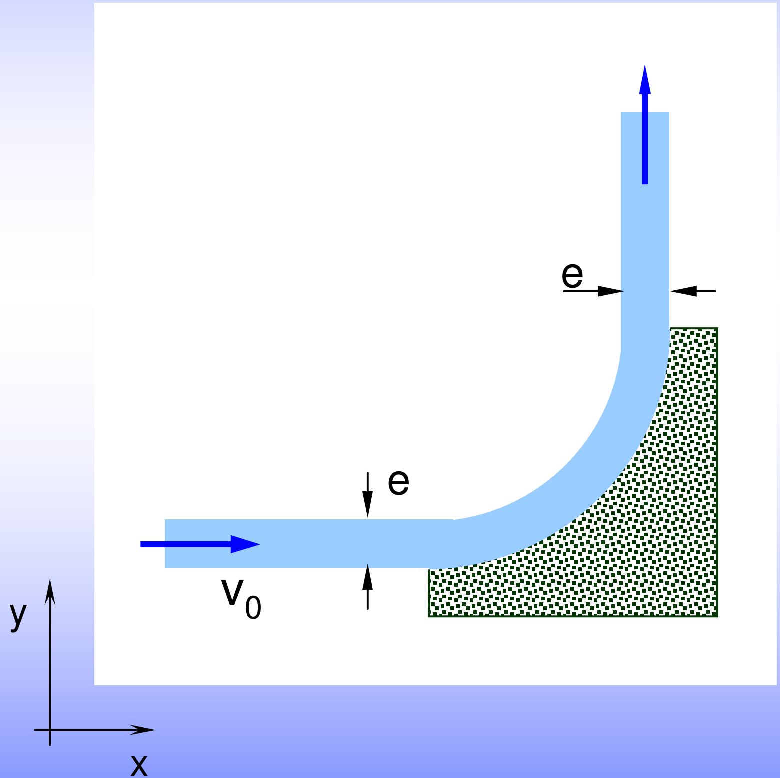
FUERZA EN UN DEFLECTOR DE CHORRO

Consideremos un chorro de velocidad v_0, ancho “e” y profundidad (perpendicular a la hoja) igual a 1.

Determinar la fuerza que está resistiendo el deflector debibo al impacto del chorro.

Es fácil ver que en este caso nos interesa las dos componentes (x, y) del TCM.

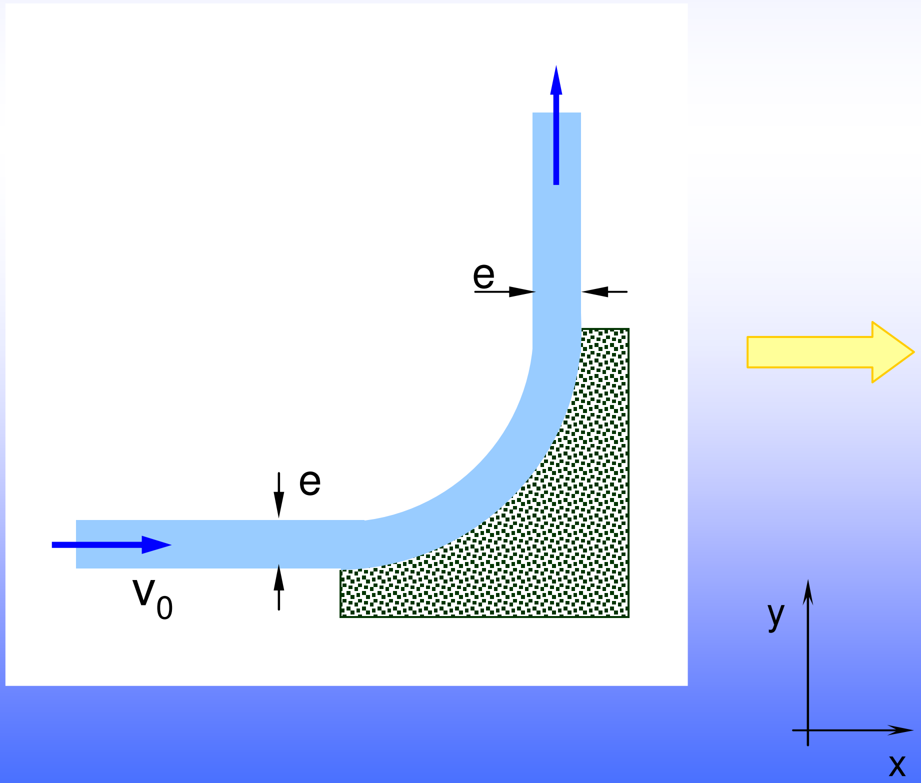
Despreciar el peso del líquido.

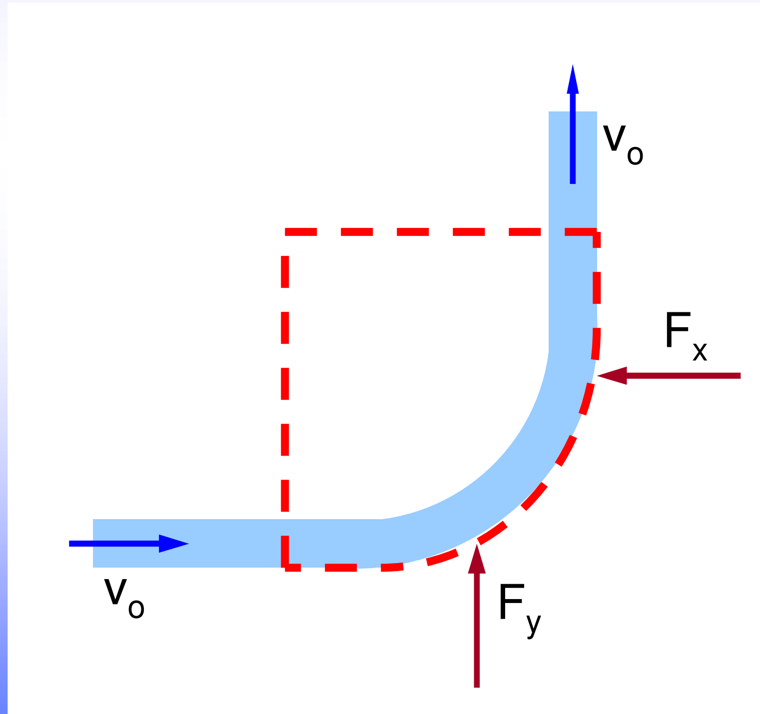


APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

FUERZA EN UN DEFLECTOR DE CHORRO

Lo primero que debemos hacer es definir el volumen de control

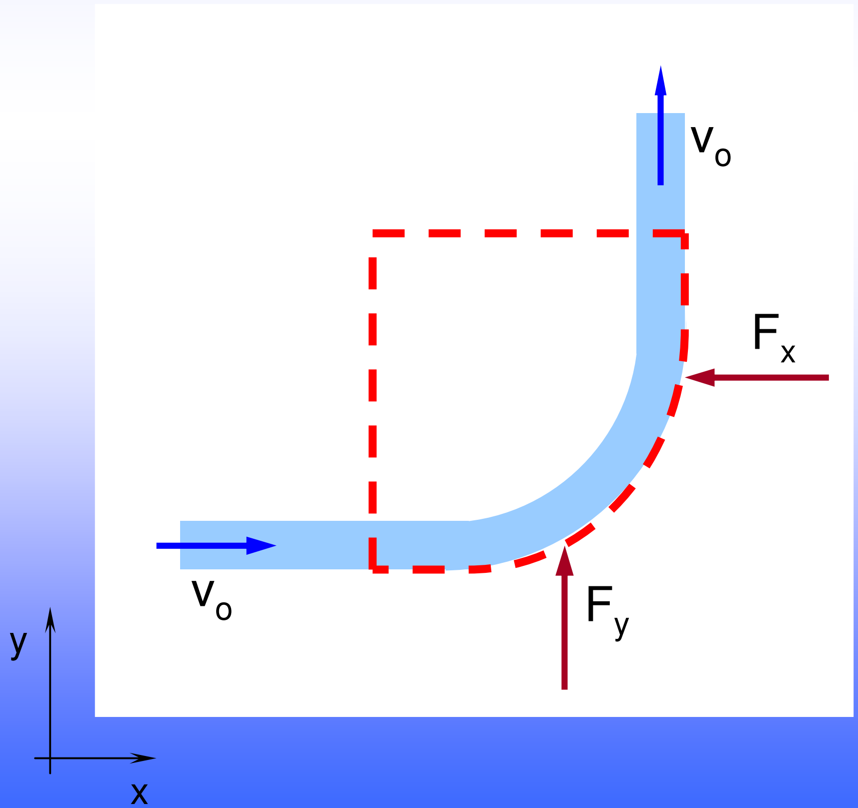




APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

FUERZA EN UN DEFLECTOR DE CHORRO

Apliquemos el TCM según x al volumen de control elegido:



$$-F_x = \rho Q\left(u_{sale} - u_{entra}\right)$$

$$u_{sale} = 0$$

$$u_{entra} = V_0$$

$$Q = V_0 \cdot e \cdot 1 = V_0 e$$

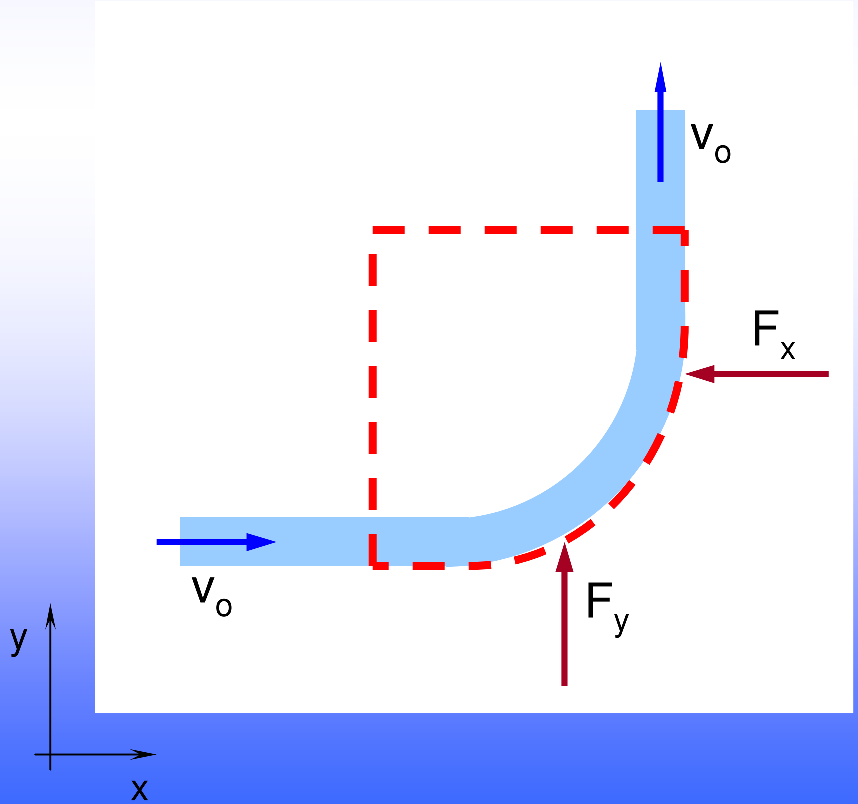
$$-F_x = \rho V_0 e\left(0 - V_0\right) = -\rho e V_0^2$$

$$F_x = \rho e V_0^2$$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

FUERZA EN UN DEFLECTOR DE CHORRO

Apliquemos el TCM según y al volumen de control elegido:



$$F_y = \rho Q\left(v_{sale} - v_{entra}\right)$$

$$v_{sale} = V_0$$
$$v_{entra} = 0$$

$$F_y = \rho V_0 e\left(V_0 - 0\right)$$

$$F_y = \rho e V_0^2$$