CI 31A - MECÁNICA DE FLUIDOS

Prof. ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DE FLUIDO EN MOVIMIENTO

Consideremos un campo permanente de velocidades, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$. Tomemos un punto P de un elemento de fluido en este campo de velocidades, de coordenadas *(x, y, z)* el que tiene velocidad $\vec{V} = (u, v, w)$. Sea otro punto P', infinitamente próximo a P, separado una distancia $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, el que tiene velocidad $\vec{V} + d\vec{V}$, con $d\vec{V} = (du, dv, dw)$. En general $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$, luego:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

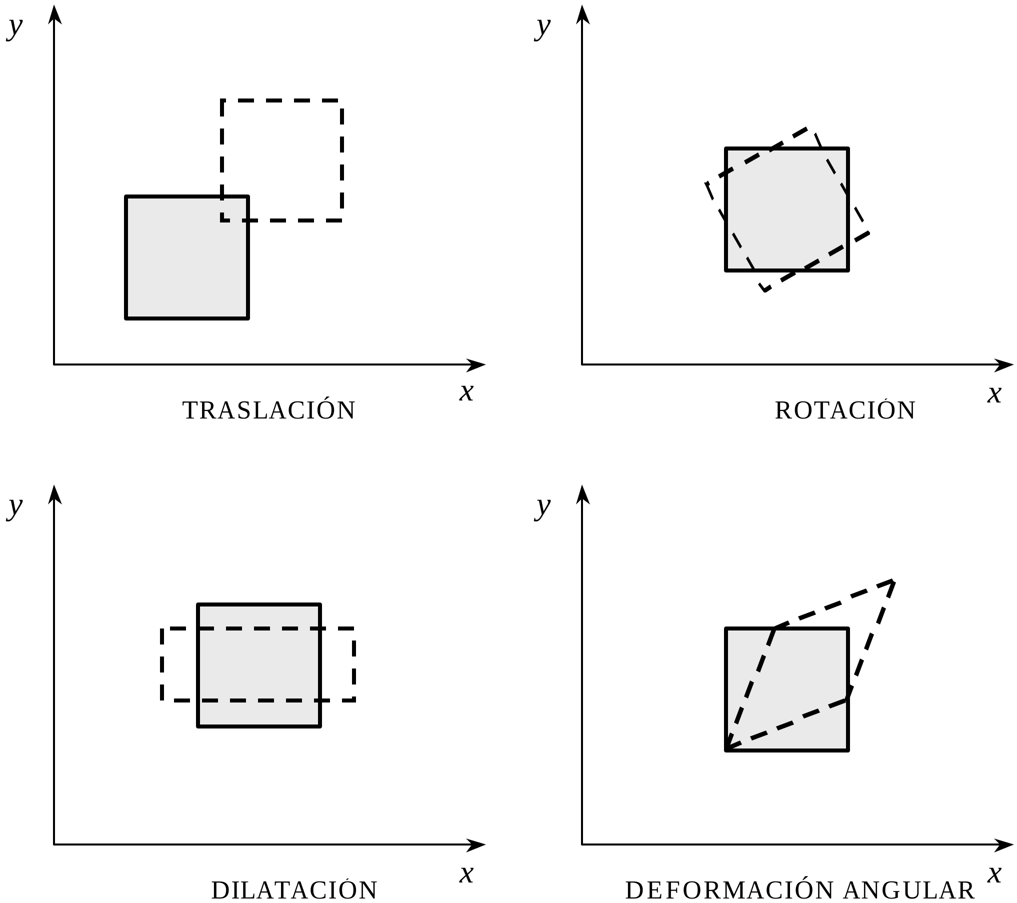
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

o:

$$d\vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

O sea, la diferencia de velocidad entre P' y P queda caracterizada por nueve derivadas parciales, las que se pueden ligar con la deformación del fluido. Dependiendo de los valores que toman estas derivadas, es posible identificar cuatro componentes básicos en el movimiento y deformación del elemento de fluido: traslación pura, rotación pura, dilatación y deformación angular, como se esquematiza en la figura siguiente.



Las distintas deformaciones básicas que se pueden identificar en el elemento de fluido están dadas por los distintos valores que pueden tomar las derivadas parciales que define a $d\vec{V}$. Para ello, consideremos el cubo ABCDEFPP' dentro del elemento de fluido, cuyo vértice P se encuentra en el origen del sistema de coordenadas, como se muestra en la figura siguiente y analicemos los distintos casos que pueden producirse.

1. CASO $d\vec{V} = 0$.

En este caso todas las derivadas parciales son nulas y el cubo dentro del elemento de fluido no sufre ninguna deformación, por lo que el elemento de fluido está sometido a una *traslación pura*.

2. $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ NULAS SI $i \neq j$ Y DIFERENTES DE CERO SI $i = j$.

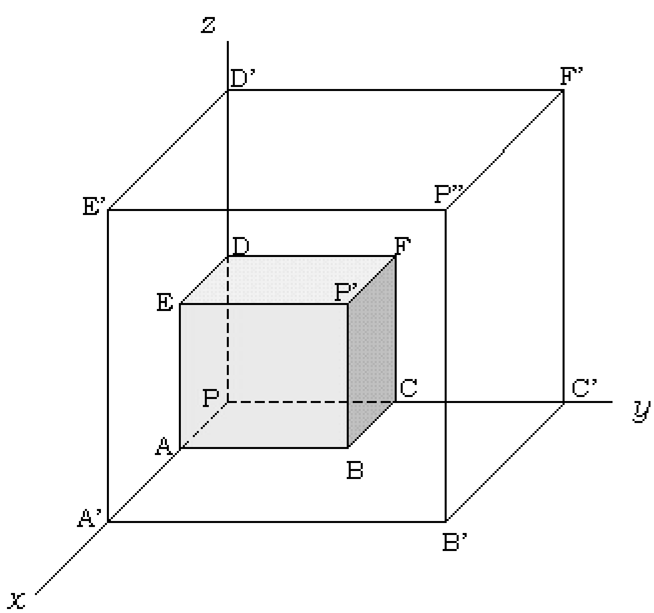
En este caso se tiene que $d\vec{V} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} dx, \dfrac{\partial v}{\partial y} dy, \dfrac{\partial w}{\partial z} dz \right)$, por lo que las velocidades de los vértices es:

$$d\vec{V}_A = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx, 0, 0 \right) \qquad d\vec{V}_B = \left(0, \frac{\partial v}{\partial y} dy, 0 \right) \qquad d\vec{V}_C = \left(0, 0, \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)$$

$$d\vec{V}_B = d\vec{V}_A + d\vec{V}_C \qquad d\vec{V}_E = d\vec{V}_A + d\vec{V}_D \qquad d\vec{V}_F = d\vec{V}_C + d\vec{V}_D$$

$$d\vec{V}_{P'} = d\vec{V}_A + d\vec{V}_C + d\vec{V}_D$$

Después de un tiempo Dt, los vértices A, B, C,..., P' se han desplazado una distancia $d\vec{V}_i Dt$, ocupando las posiciones A', B', C',..., P''. Este tipo de deformación se denomina *dilatación cúbica*. En el caso de fluidos incompresibles, debe satisfacerse la ecuación $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$, por lo que alguna de las derivadas parciales debe tener el signo opuesto. De este modo, la deformación debe ser tal que el volumen sea constante.

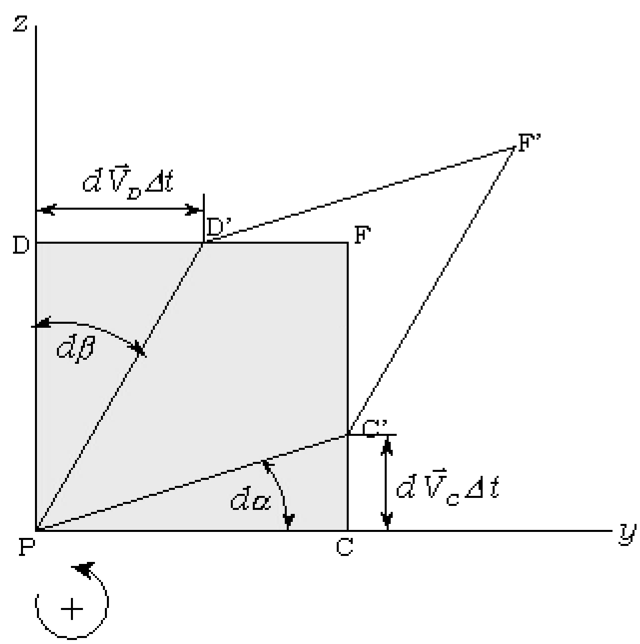


3. DERIVADAS PARCIALES NULAS, EXCEPTO $\dfrac{\partial v}{\partial z}$ Y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

En este caso se tiene que $d\vec{V} = \left(0, \dfrac{\partial v}{\partial z} dz, \dfrac{\partial w}{\partial y} dy\right)$. Si consideramos la cara PCFD del cubo (o ABP'E), la velocidad de los vértices C, F y D (o B, P' y E) es:

$$d\vec{V}_C = \left(0, 0, \frac{\partial w}{\partial y} dy\right) \qquad d\vec{V}_F = \left(0, \frac{\partial v}{\partial z} dz, \frac{\partial w}{\partial y} dy\right) \qquad d\vec{V}_D = \left(0, \frac{\partial v}{\partial z} dz, 0\right)$$

El desplazamiento que experimentan los vértices C, F y D es $d\vec{V}_C \Delta t$, $d\vec{V}_F \Delta t$ y $d\vec{V}_D \Delta t$, respectivamente. Siendo la situación la esquematizada en la figura siguiente:



El desplazamiento CC' es $\left|d\vec{V}_C \Delta t\right| = \dfrac{\partial w}{\partial y} dy \Delta t$ y el desplazamiento DD' es $\left|d\vec{V}_D \Delta t\right| = \dfrac{\partial v}{\partial z} dz \Delta t$. Manteniendo la convención de ángulo positivo para giros en el sentido de los punteros del reloj, podemos aproximar los ángulos $d\alpha$ y $d\beta$ como:

$$d\alpha \approx \frac{\partial w}{\partial y}\Delta t \qquad d\beta \approx -\frac{\partial v}{\partial z}\Delta t$$

La deformación angular total es:

$$d\gamma = d\alpha - d\beta$$

o sea:

$$d\gamma = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta t$$

Se define la *tasa de deformación angular en el plano yz* como:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Este análisis también puede hacerse en los planos xy y xz, resultando:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Las relaciones anteriores se expresan en forma general como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Si el ángulo $d\beta$ es positivo, todo sucede como si el elemento rotara en torno al eje x con una velocidad angular ω_x, dada por:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\frac{d\alpha + d\beta}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Similarmente, se obtiene para giros en torno a los ejes y y z:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

El caso más general es: $\vec{w} = \left(w_x, w_y, w_z\right)$. El vector $\vec{w}$ se denomina *vorticidad* y en notación vectorial podemos escribirlo como:

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V}$$

donde

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

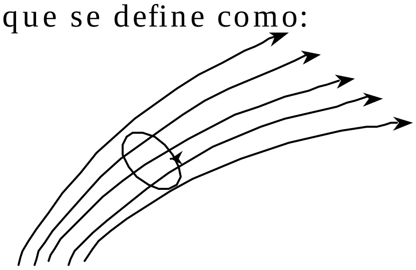
De este modo, hemos visto que una adecuada combinación de derivadas parciales nulas en $d\vec{V}$ nos indica una dilatación o deformación lineal en el elemento de fluido, una deformación angular o una rotación. Evidentemente, el caso más general corresponde a la situación en la que ninguna de las derivadas es nula, experimentando el elemento de fluido una traslación, deformación lineal, deformación angular y rotación. En efecto, podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & e_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & 0 & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$

CIRCULACIÓN

Ligada a la vorticidad se encuentra la *circulación*, la que se define como:

$$G = \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} \quad d\ell$$



donde $\hat{t}$ es el vector unitario tangente a la curva cerrada C.

Teorema de Stokes: Si $\vec{f}$ es un campo vectorial, se cumple que

$$\oint_C \vec{f} \cdot \hat{t} \quad d\ell = \int_S \left(\nabla \times \vec{f}\right) \cdot \hat{n} \quad dS$$

donde S es una superficie definida por la curva cerrada C y $\hat{n}$ es el vector unitario normal que define a la superficie.

Si el campo $\vec{f}$ corresponde al campo de velocidades, entonces podemos deducir una relación entre la circulación y la vorticidad:

$$\boldsymbol{G} = \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} \quad d\ell = 2\int_S \vec{\boldsymbol{w}} \cdot \hat{n} \quad dS$$

Un flujo para el que $\vec{\boldsymbol{w}} \neq 0$ es un *flujo rotacional*. Por el contrario, si $\vec{\boldsymbol{w}} = 0$ el flujo es *irrotacional*.

Para el flujo irrotacional es posible encontrar una función escalar $\boldsymbol{F}$ a partir de la cual puede obtenerse el campo de velocidades. En efecto, del cálculo vectorial se sabe que si $\nabla \times \vec{V} = 0$, entonces existe una función escalar $\boldsymbol{F}$ tal que $\vec{V} = \nabla \boldsymbol{F}$. A la función $\boldsymbol{F}$ se le denomina *función potencial*.