Redes Bayesianas (2)

Carlos Hurtado L.

Depto. de Ciencias de la Computación, Universidad de Chile

Referencia

Bayesian networks without tears: making Bayesian networks more accessible to the probabilistically unsophisticated. Eugene Charniak

AI Magazine Volume 12 , Issue 4 (Winter 1991) Pages: 50 - 63 Year of Publication: 1991

Intuición de los arcos de una red Bayesiana (1)

1. **Independencia Condicional**: para determinar el valor de la probabilidad condicional de un nodo (dado que ocurrieron eventos en los nodos antecesores en el orden de variables) sólo necesito información de los nodos padres.

Intuición de los arcos de una red Bayesiana (2)

2. **Diagrama de Influencia**: Las aserciones de dependencia condicional típicamente corresponden a causalidad directa entre variables (principal factor de éxito de las redes Bayesianas, Heckerman).

Ejemplo: Diagrama de Influencia o Red Causal ("family out problem")

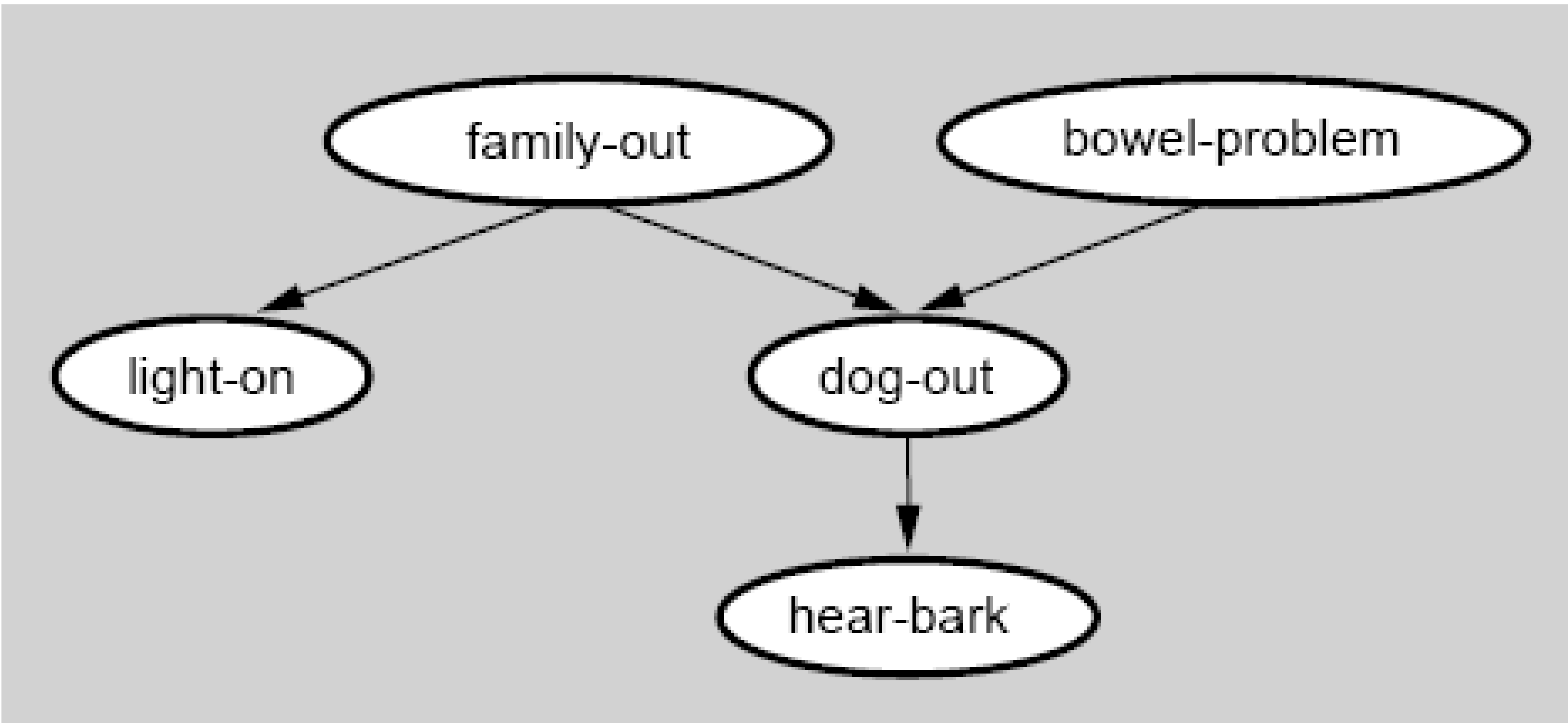


Figure 1. A Causal Graph.

Ejemplo: Diagrama de Influencia o Red Causal (“family out problem”)

- Es una red Bayesiana cuyos arcos representan relaciones causa/efecto
- Las relaciones causales no son necesariamente “determinísticas”
  - Ejemplo: en algunos casos la familia sale del hogar sin dejar el perro en el patio o sin dejar encendida la luz de la casa.

Ejemplo: Diagrama de Influencia o Red Causal (“family out problem”)

- La red est'a dada por un ordenamiento donde
- Si A causa (directamente) B, entonces A precede a B en el ordenamiento
- Esto permite simplificar arcos que no están asociados a relaciones causales

La red está definida bajo un ordenamiento de variables

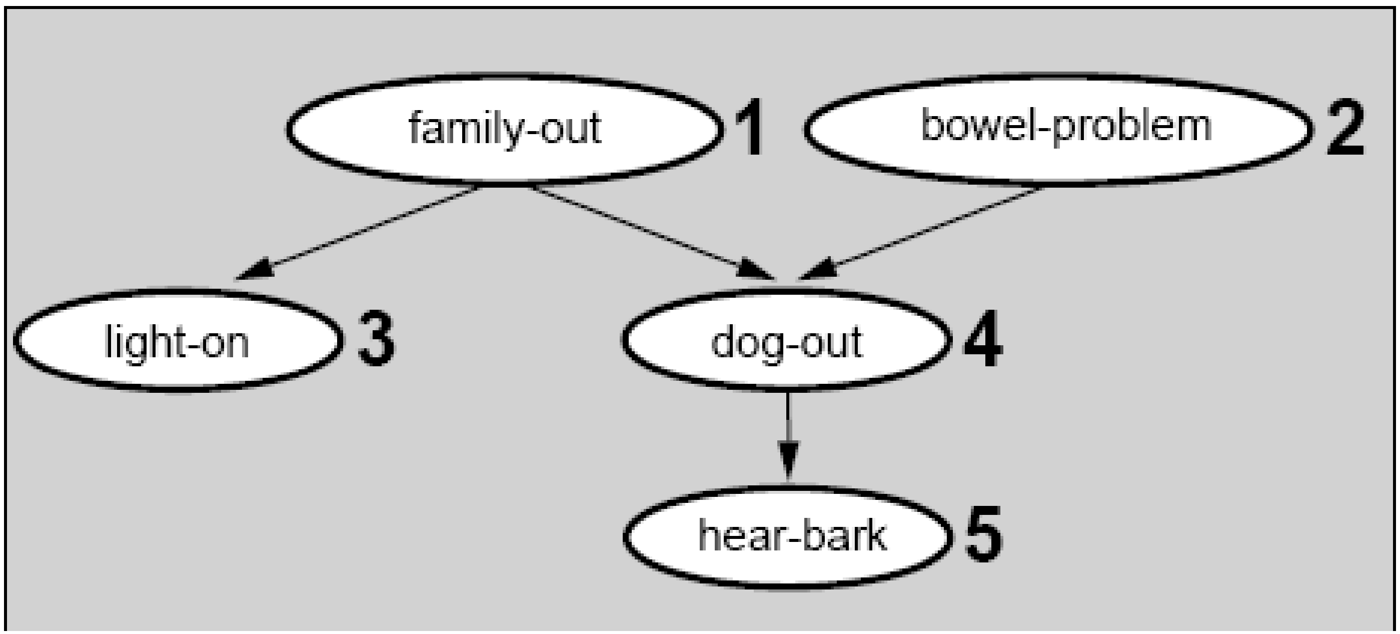
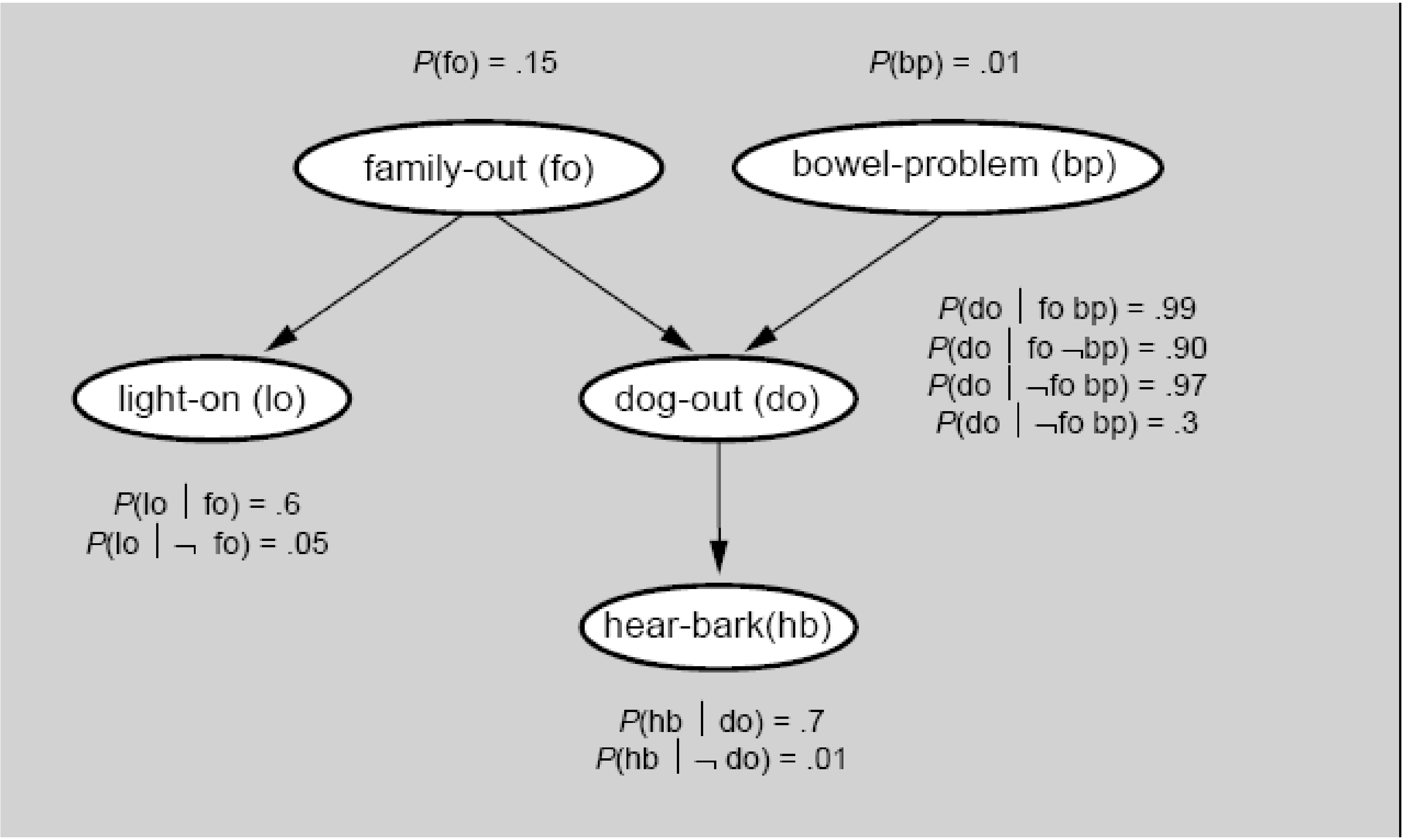
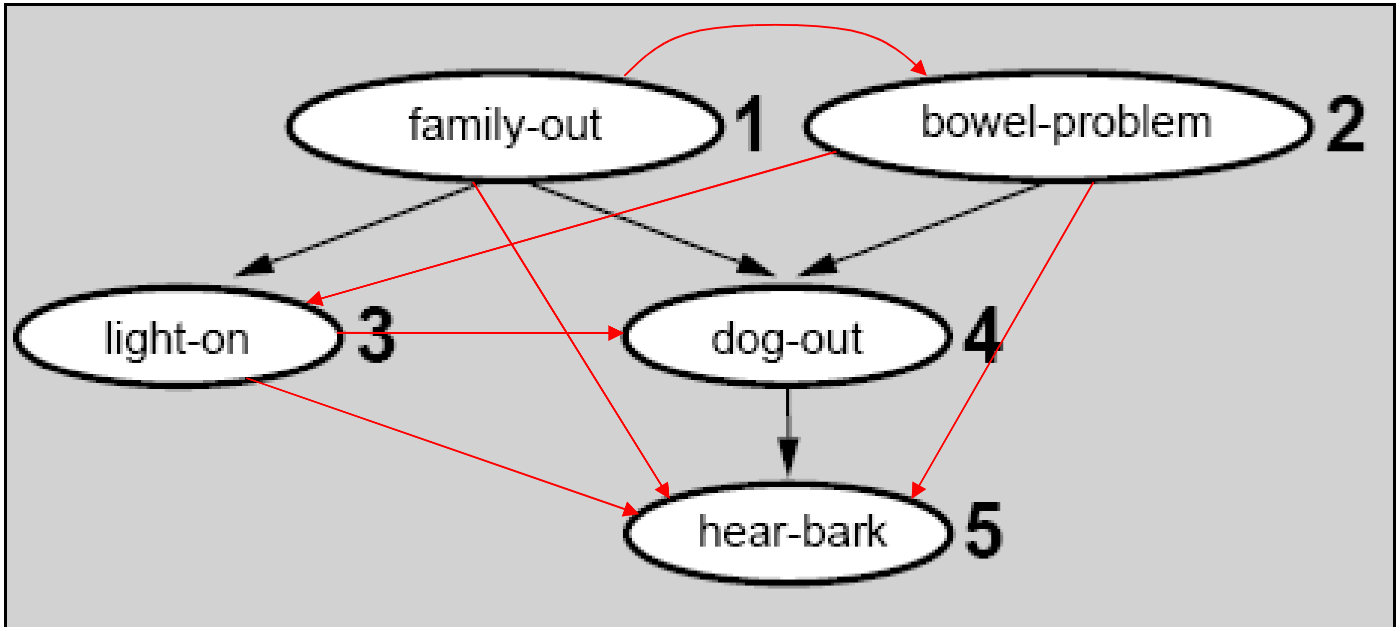


Diagrama Causal + Probabilidades Locales



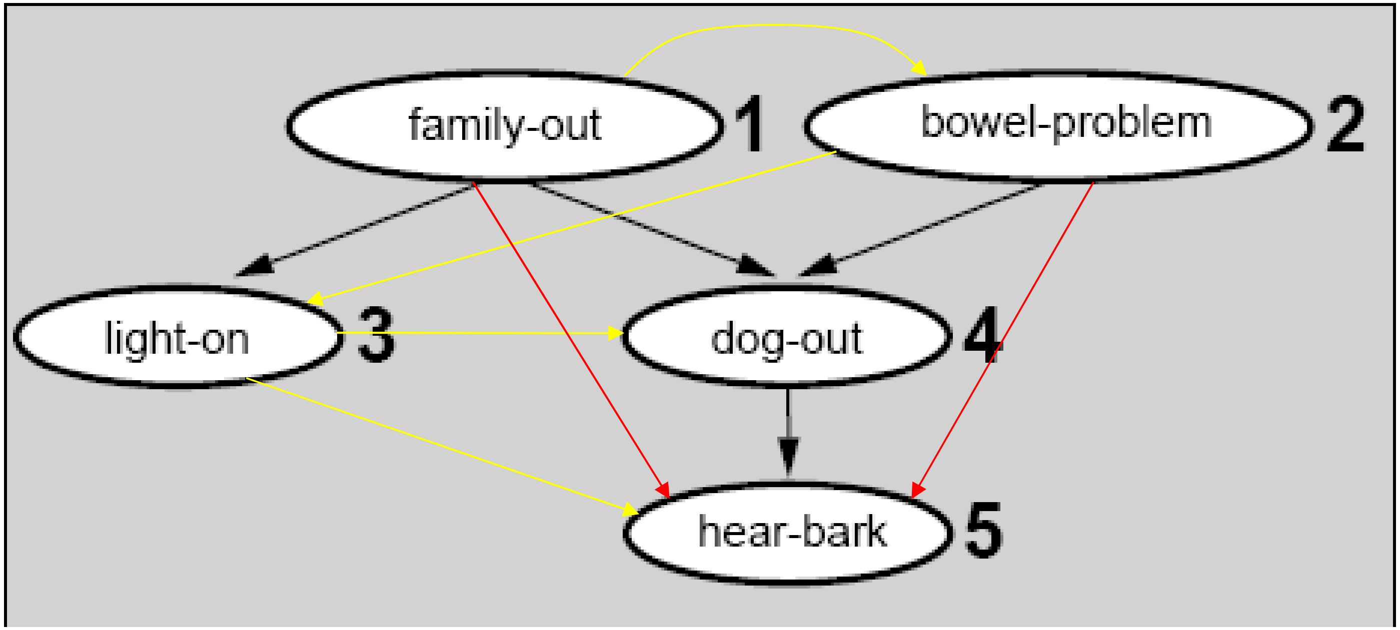
Sin suposiciones de independencia tenemos los siguientes arcos



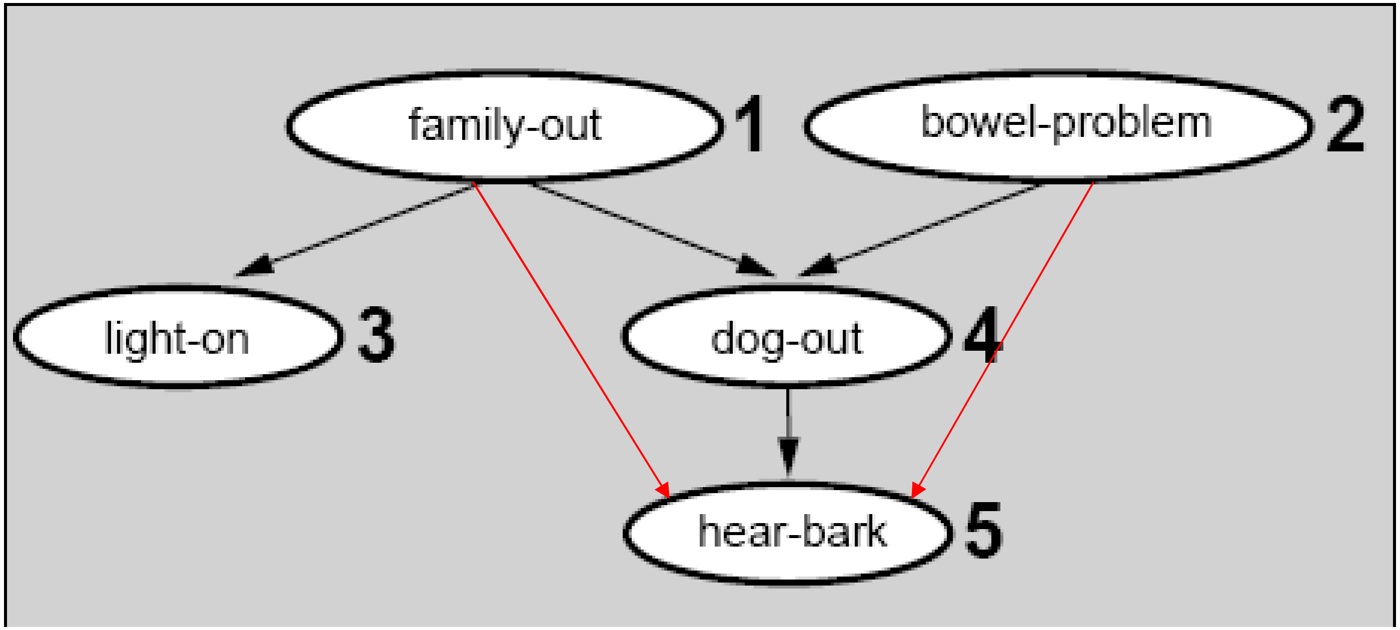
Ejercicio

En la red “family out” ¿Cuántas probabilidades nos ahorramos en el modelo usando las suposiciones de independencia?

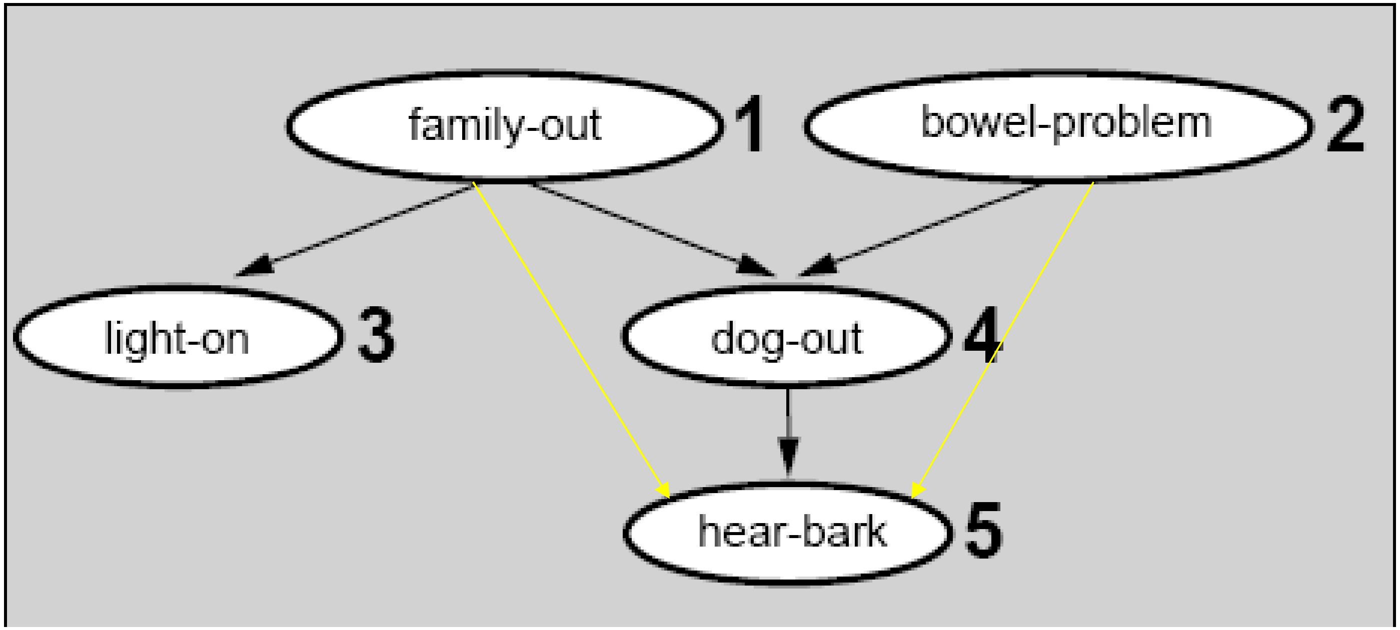
Eliminamos arcos donde no hay causa-efecto



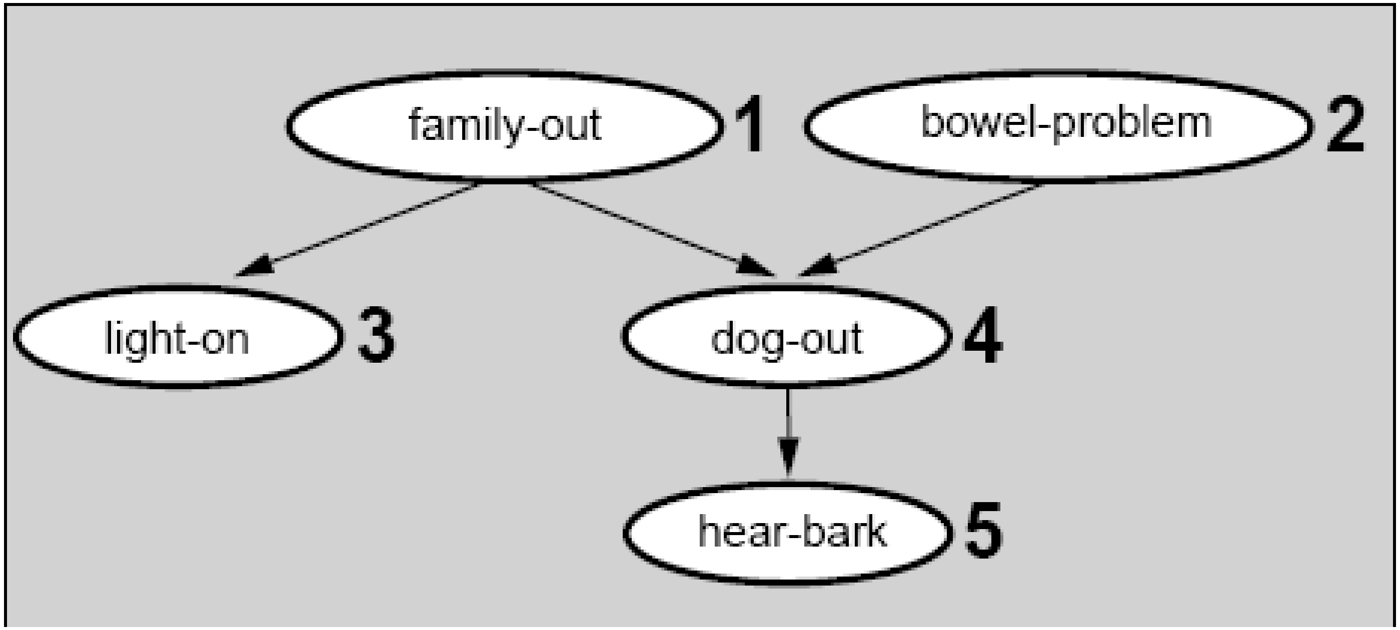
Eliminamos arcos donde no hay causa-efecto (cont.)



Eliminamos causas indirectas



Eliminamos causas indirectas (cont.)



Razonamiento sobre Dependencias

- La estructura de la red permite inferir relaciones de dependencia/independencia entre variables (sin necesidad de mirar tablas locales).
- Noción fundamental para esto: caminos d-conectados

Caminos D-Conectados

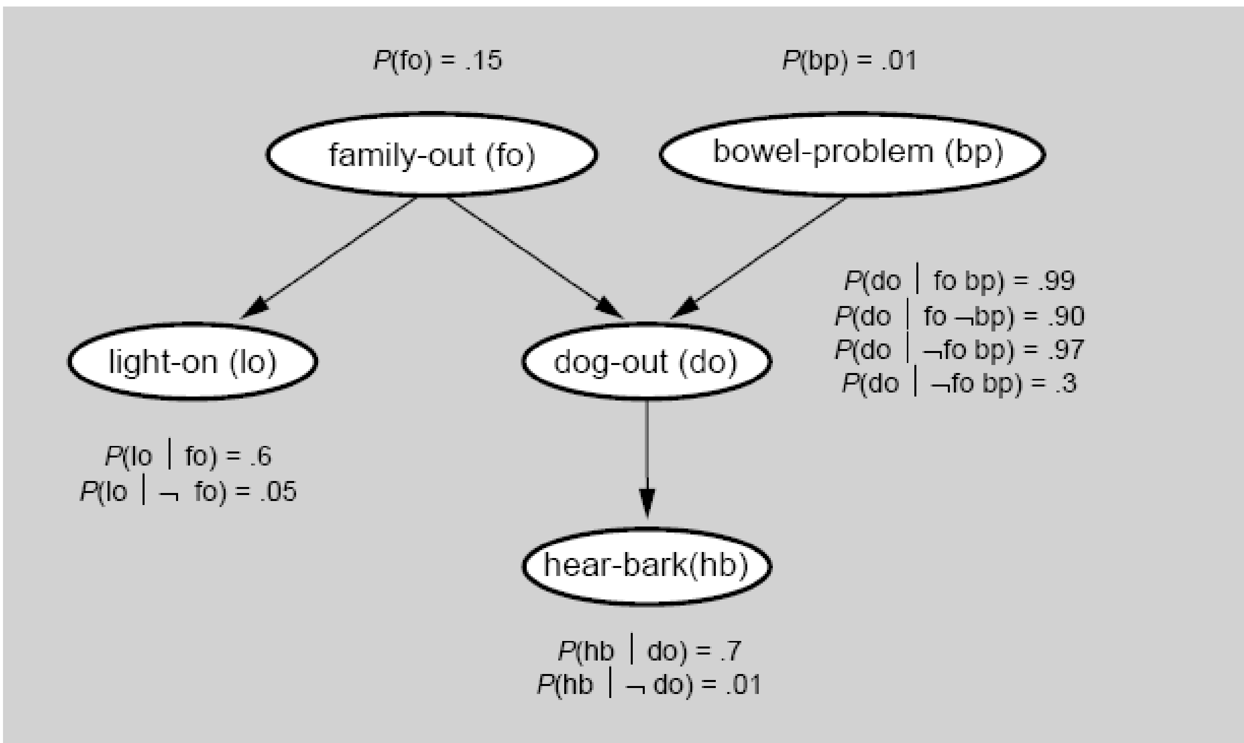
- Cuando tenemos un camino d-conectado de un nodo X a un nodo Y, bajo la evidencia E tenemos que:

$$P(Y \mid X, E) \neq P(Y \mid E)$$

- Es decir, Y depende de X dado la evidencia E (conjunto de variables).
- Si no existe este camino, Y es independiente de X dado E
- Un camino d-conectado se puede ver como que existe un flujo de información en la red.

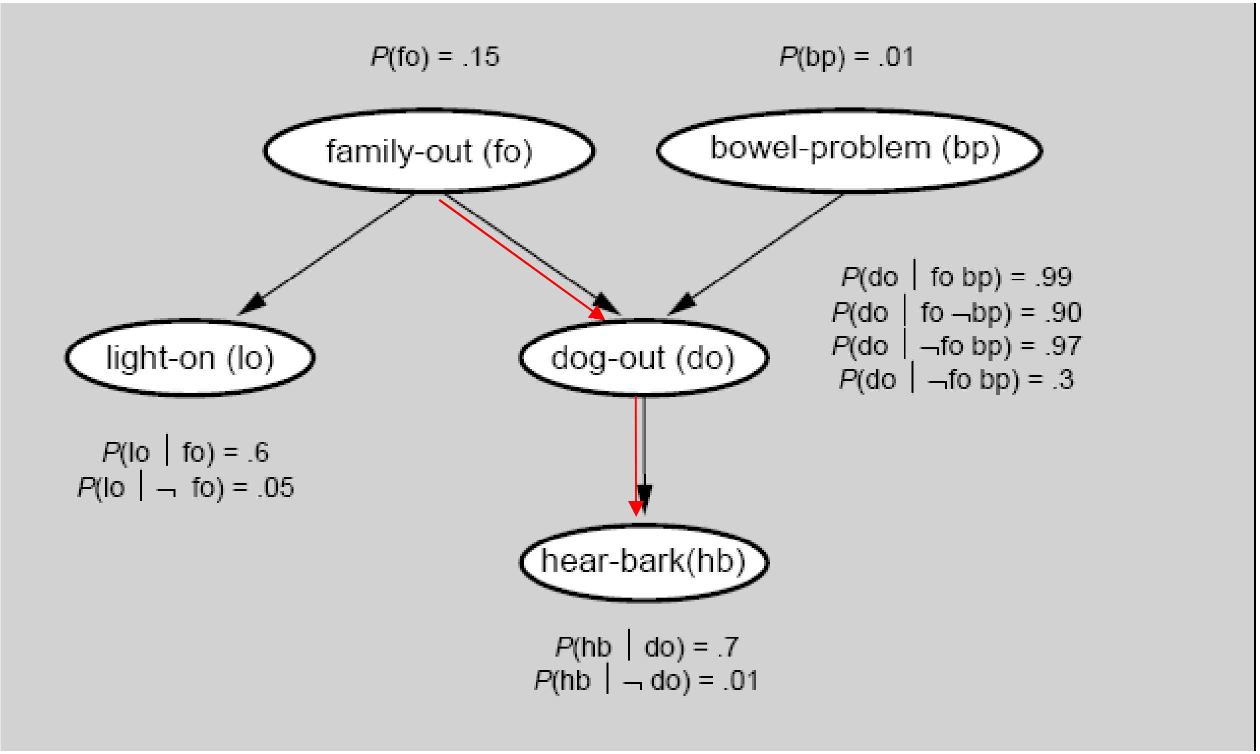
Ejemplo: caminos d-conectados

hb es independiente de fo dada E=do, es decir P(hb | fo,do) = P(hb | do) ya que no existe un camino d-conectado desde fo a hb dada E=do.



Ejemplo: caminos d-conectados

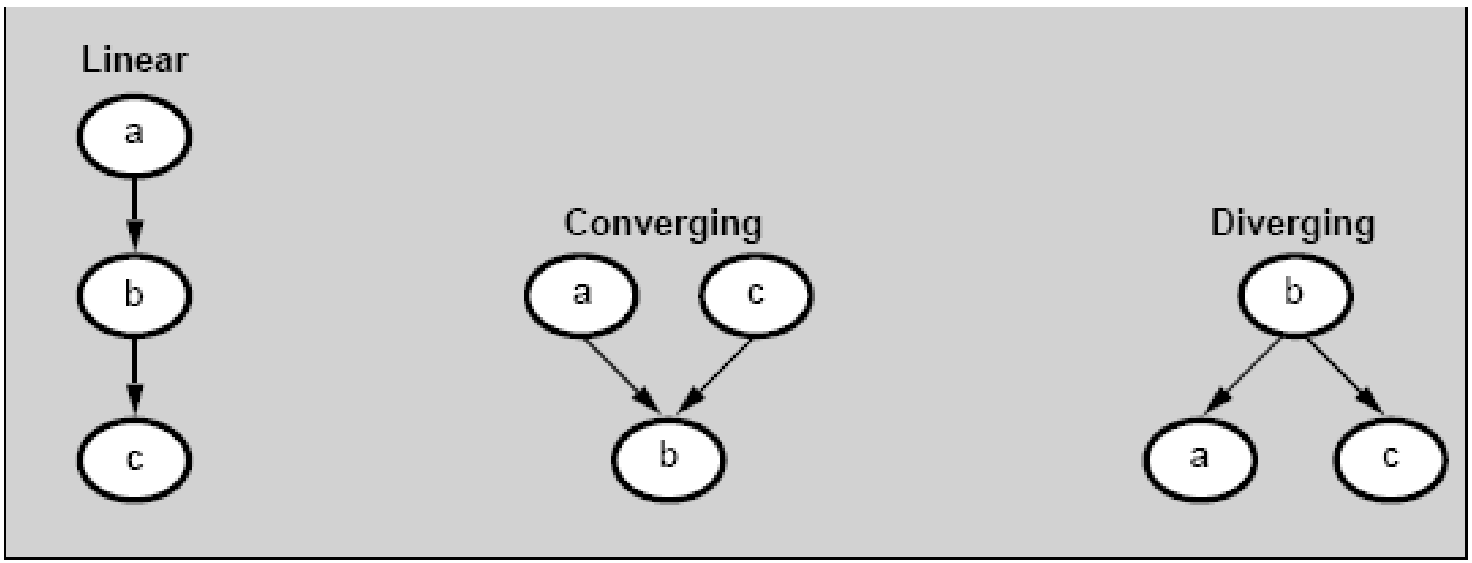
hb es dependiente de fo dada E= {}, es decir P(hb | do) ≠ P(hb) ya que existe un camino d-conectado desde fo a hb dada E={}.



Caminos D-Conectados: Definición

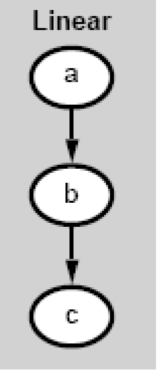
- Veremos el caso básico: caminos de tres nodos (conexiones)
- Queremos ver la dependencia de dos nodos **a** y **c**.
- La noción de camino d-conectado se define dependiendo del tipo de conexión.

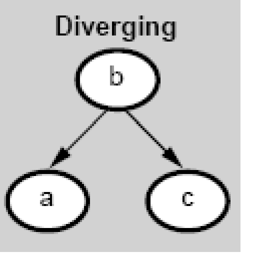
Tipos de Conexiones



Caminos D-conectados: Condición 1

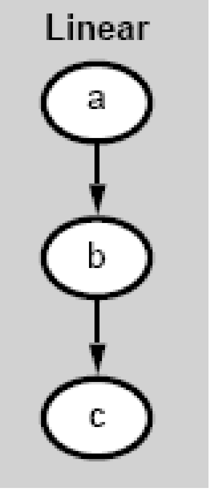
- Condición 1: El camino es “linear” (lineal) o “diverging” (divergente) y **b** no está en E

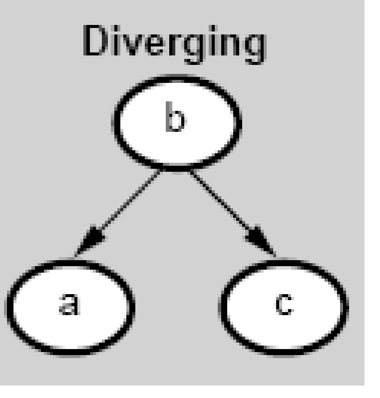




Caminos D-conectados: Condición 1 (cont.)

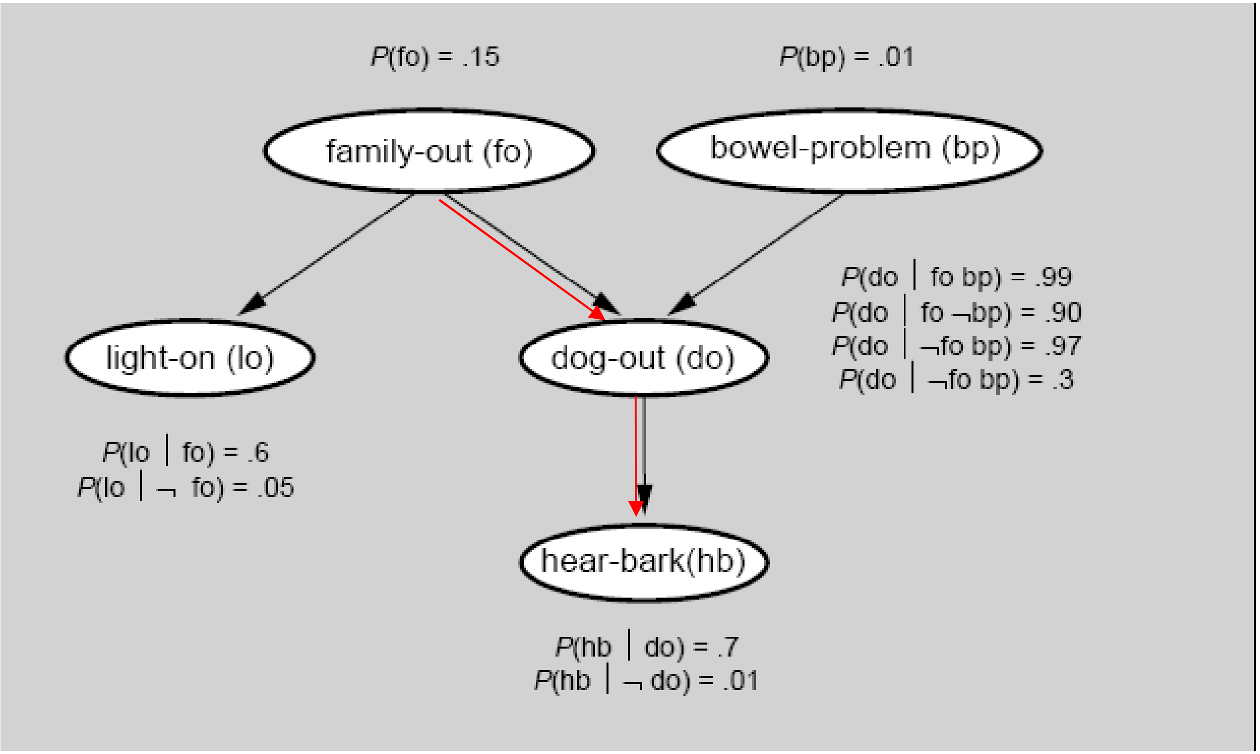
- En este caso existe una relación causal indirecta entre **a** y **c**, o existe una causa común entre ellos.





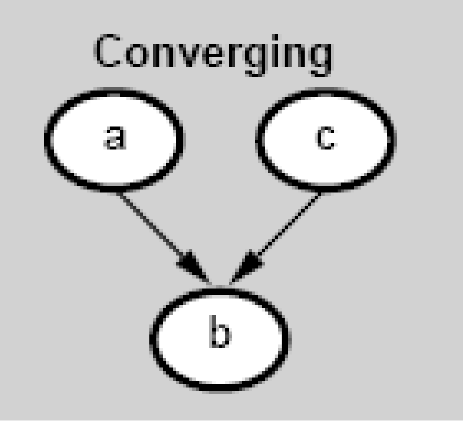
Caminos d-conectados Cond 1: Ejemplo

hb es dependiente de fo dada E= {}, es decir P(hb | do) ≠ P(hb) ya que existe un camino d-conectado desde fo a hb dada E={}.



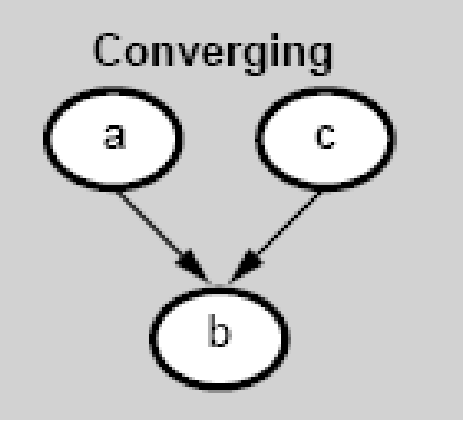
Caminos D-conectados: Condición 2

- Condición 2: el camino es "*converging*" (convergente), y **b** o un descendiente de **b** está en **E**.



Caminos D-conectados: Condición 2

- Intuición, conocemos **b** (ya que está en E), ahora si conocemos **a** (que causa **b**), es menos probable que la explicación de **b** venga de **c**.



Caminos d-conectados Cond. 2: Ejemplo

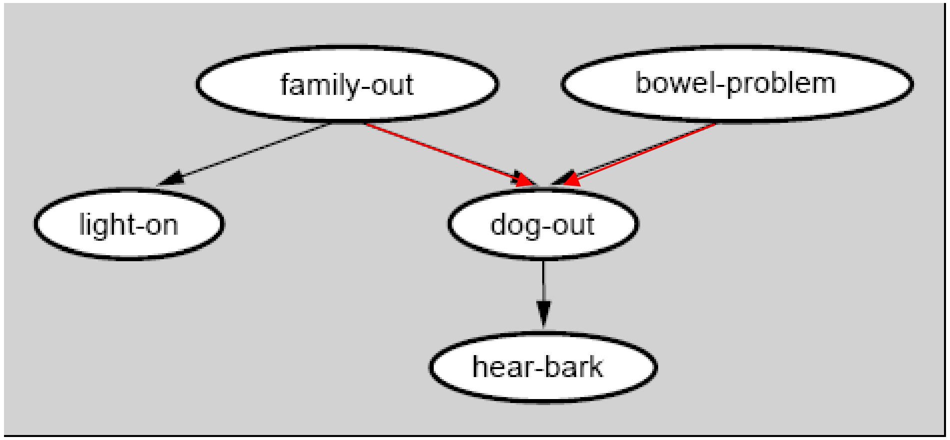


Figure 1. A Causal Graph.

P(family-out | bowel-prob.,dog-out) no se puede simplificar

Ya que existe un camino d-conectado de fo a bp dada E=do

Esta relación de dependencia no es causal

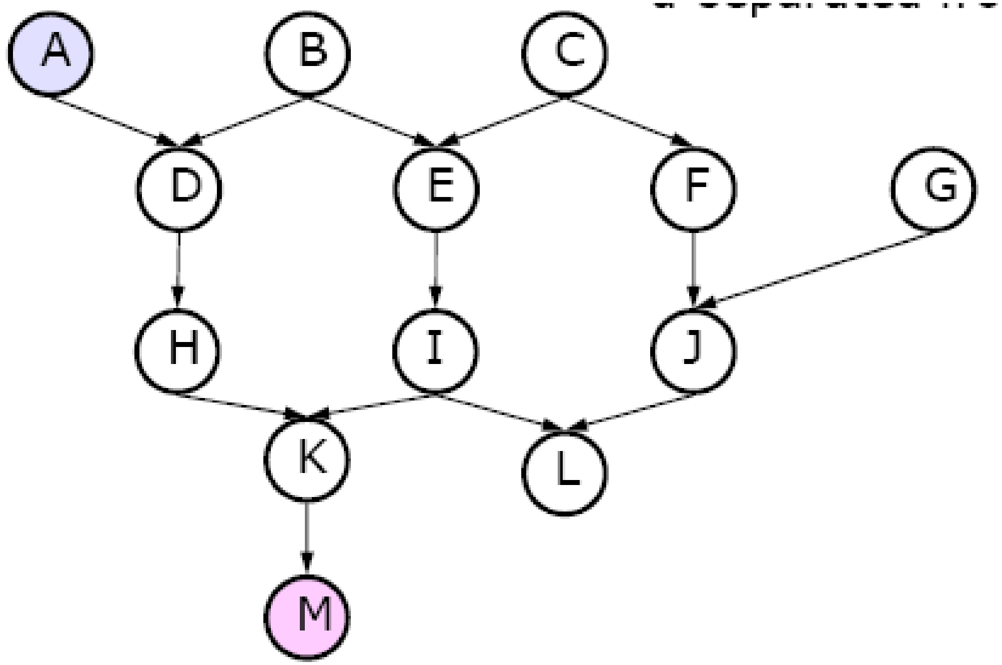
Definición Caminos D-Conectados

- Si el camino son dos nodos siempre es d-conectado
- Si el camino es una conexión:
  - Es d-conectado ssi se cumple condición 1 o condición 2.
- Si el camino tiene más de tres nodos:
  - Es d-conectado ssi todas sus conexiones son d-conectadas dado E

Ejemplo

¿ P(A|E,M) = P(A|M) ?

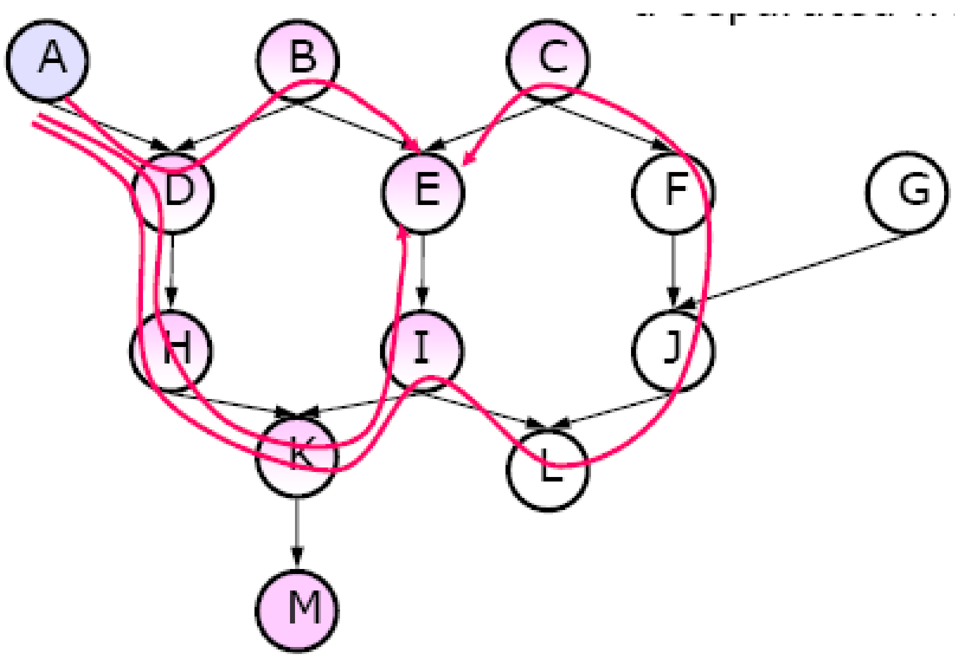
¿ Existe un camino d-conectado de A a E dado la evidencia M ?



Ejemplo

¿ P(A|E,M) = P(A|M) ?

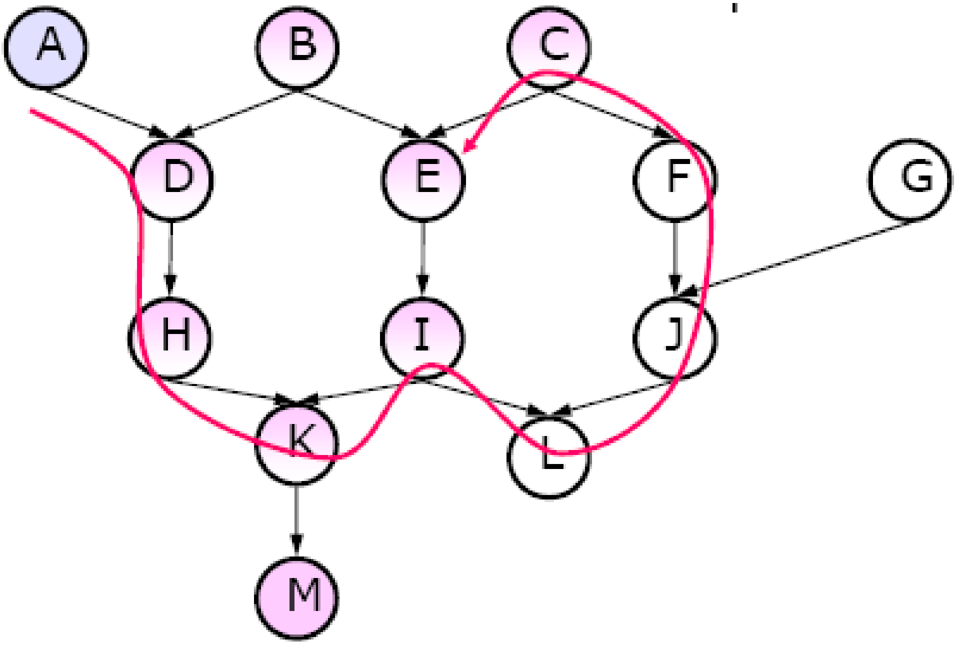
¿ Existe un camino d-conectado de A a E dado la evidencia M ?



Ejemplo

¿ P(A|E,M) = P(A|M) ?

¿ Existe un camino d-conectado de A a E dado M ?

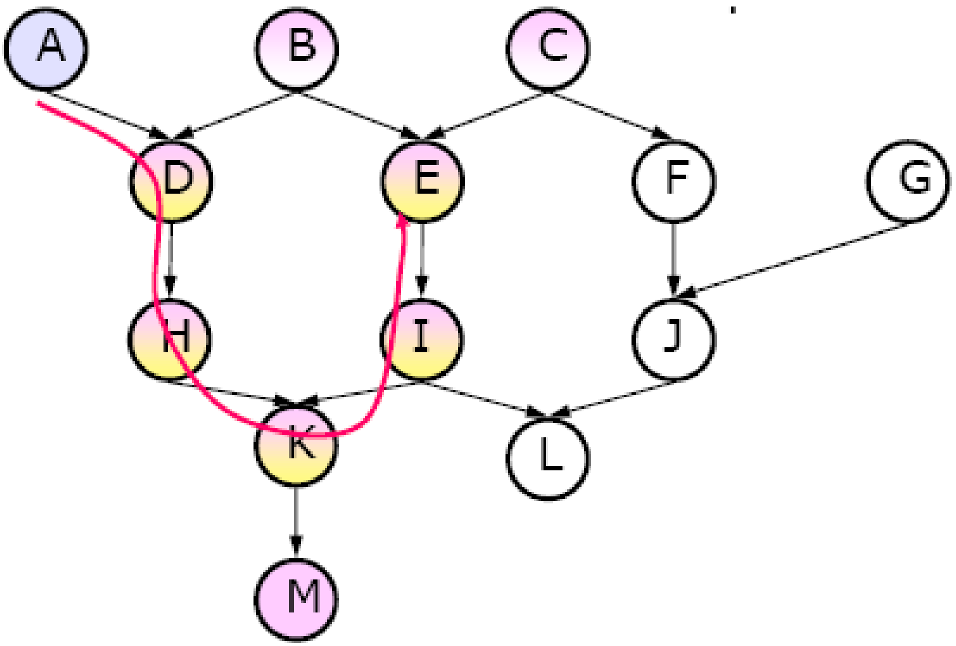


Este camino no es d-conectado dado M ¿por qué?

Ejemplo

¿ $P(A|E,M) = P(A|M)$?

¿ Existe un camino d-conectado de A a E dado M ?

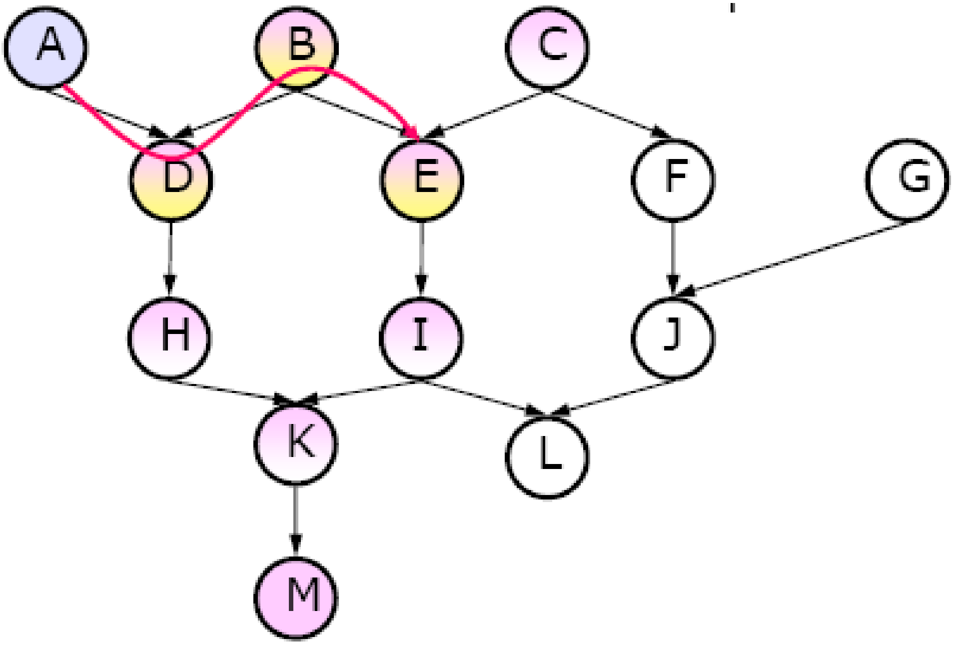


Este camino es d-conectado dado M ¿por qué?

Ejemplo

¿ $P(A|E,M) = P(A|M)$?

¿ Existe un camino d-conectado de A a E dado M ?



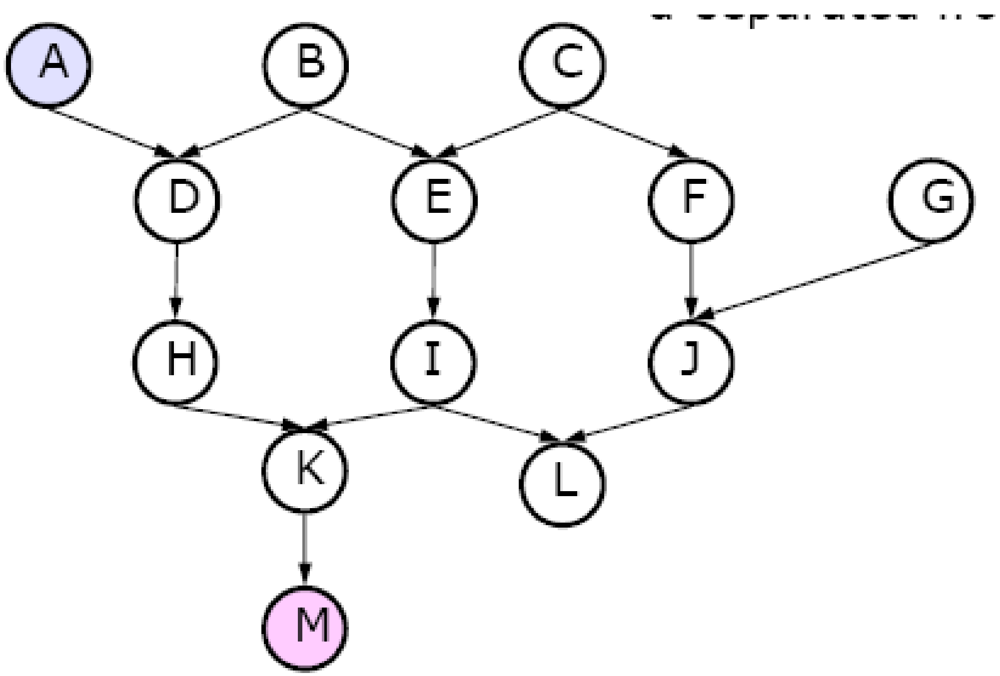
Este camino es d-conectado dado M ¿por qué?

Ejemplo

¿ P(A|E,M) = P(A|M) ?

¿ Existe un camino d-conectado de A a E dado la evidencia M ?

Resp: si, dos en efecto.



Podemos analizar la dependencia de cualquier par de variables analizando caminos d-conectado

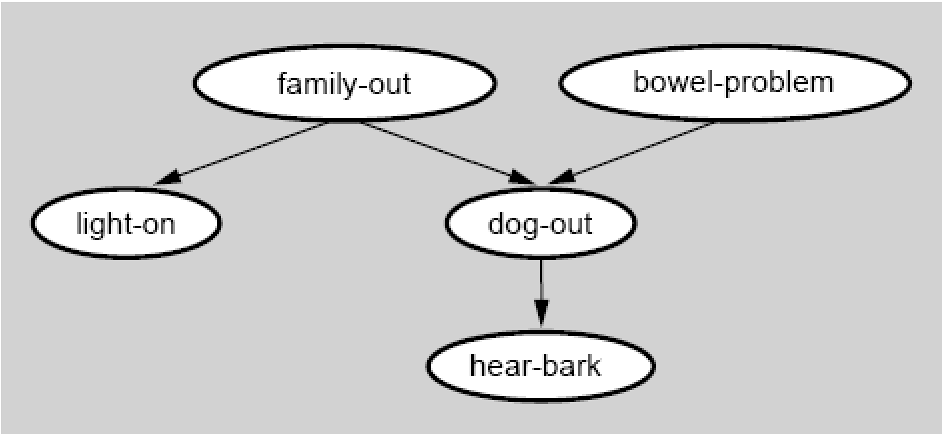


Figure 1. A Causal Graph.

Por ejemplo ¿ son fo y hb dependientes ?
i.e. ¿ $P(fo \mid hb) \neq P(fo)$?

Podemos analizar la dependencia de cualquier par de variables

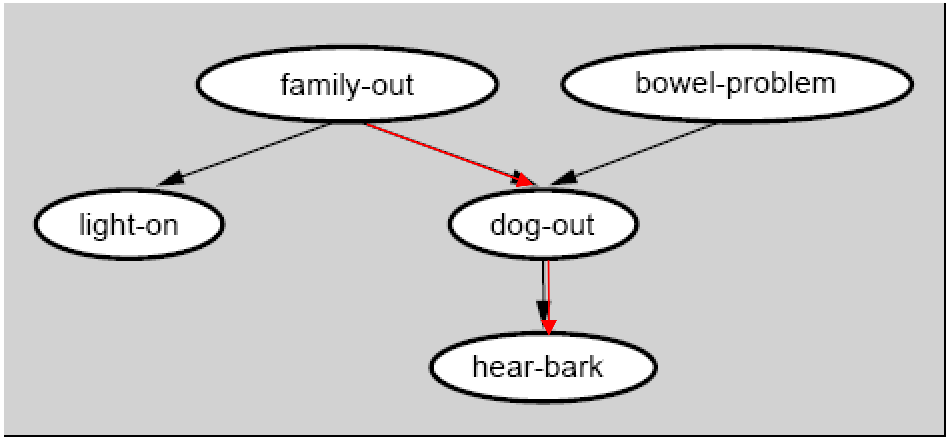


Figure 1. A Causal Graph.

Por ejemplo ¿ son fo y hb dependientes ?
i.e. ¿ $P(fo \mid hb) \neq P(fo)$?

Podemos analizar la dependencia de cualquier par de variables

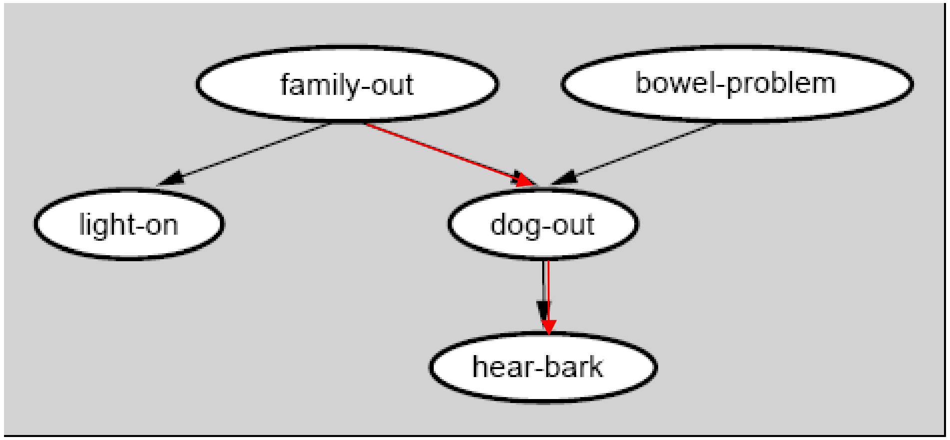


Figure 1. A Causal Graph.

Por ejemplo ¿ son fo y hb dependientes ?
i.e. ¿ $P(fo \mid hb) \neq P(fo)$?

Resp. SI ya que existe un camino d-con de fo a bp dada E={}

Podemos decir que fo causa indirectamente a hb

Podemos analizar la dependencia de cualquier par de variables

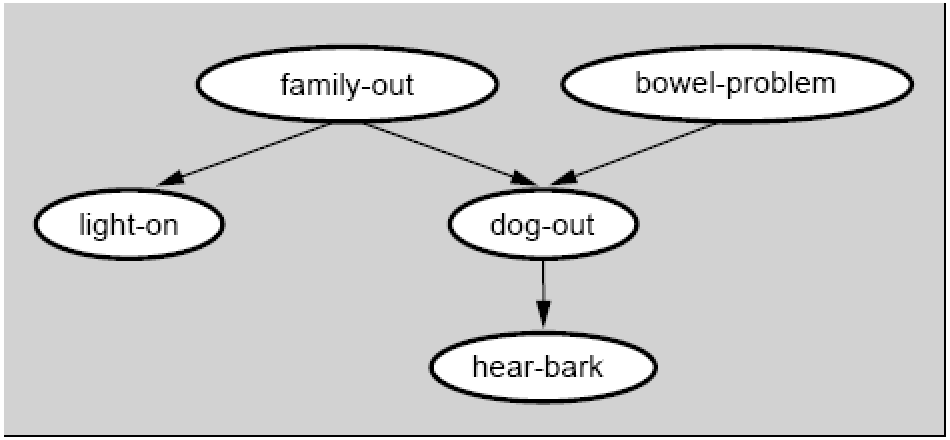


Figure 1. A Causal Graph.

Por ejemplo ¿ son lo y do dependientes ?
i.e. ¿ $P(lo \mid do) \neq P(lo)$?

Podemos analizar la dependencia de cualquier par de variables

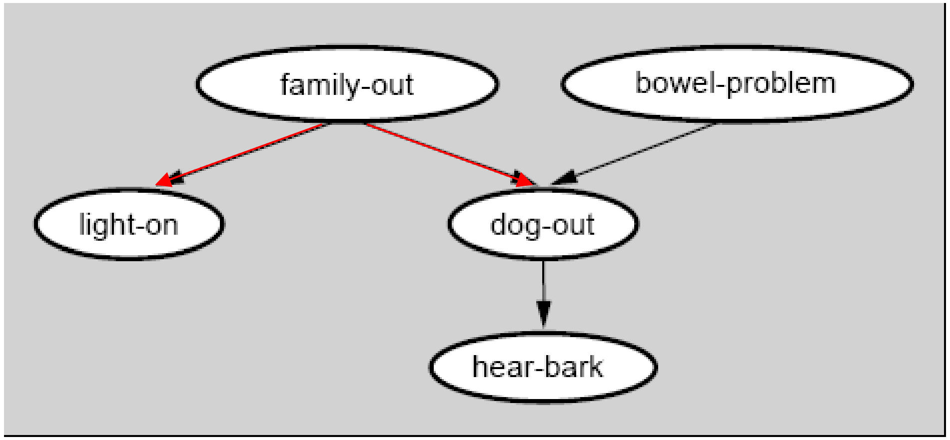


Figure 1. A Causal Graph.

Por ejemplo ¿ son lo y do dependientes ?
i.e. ¿ $P(lo \mid do) \neq P(lo)$?

Resp. SI ya que existe un camino d-con de lo a db dada E={}

Podemos decir que lo y do tienen una causa común (fo)

Podemos analizar la dependencia de cualquier par de variables (cont.)

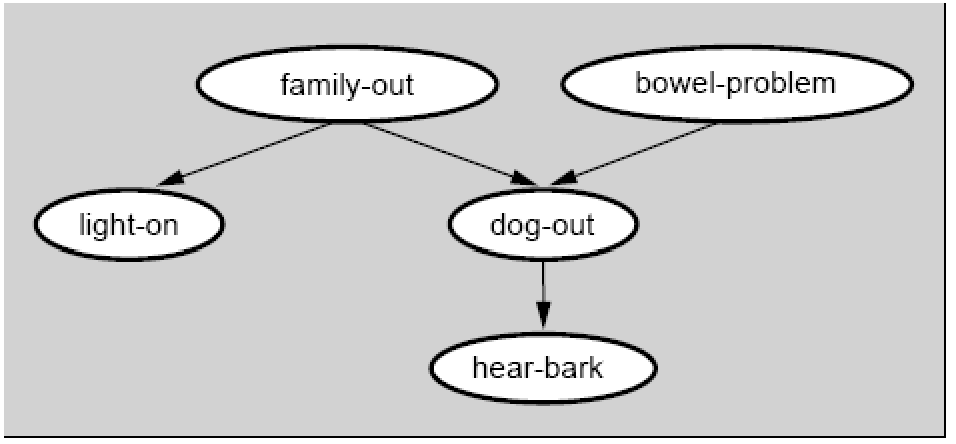


Figure 1. A Causal Graph.

Por ejemplo ¿ son fo y bp dependientes ?
i.e. ¿ $P(fo \mid bp) \neq P(fo)$?

Podemos analizar la dependencia de cualquier par de variables (cont.)

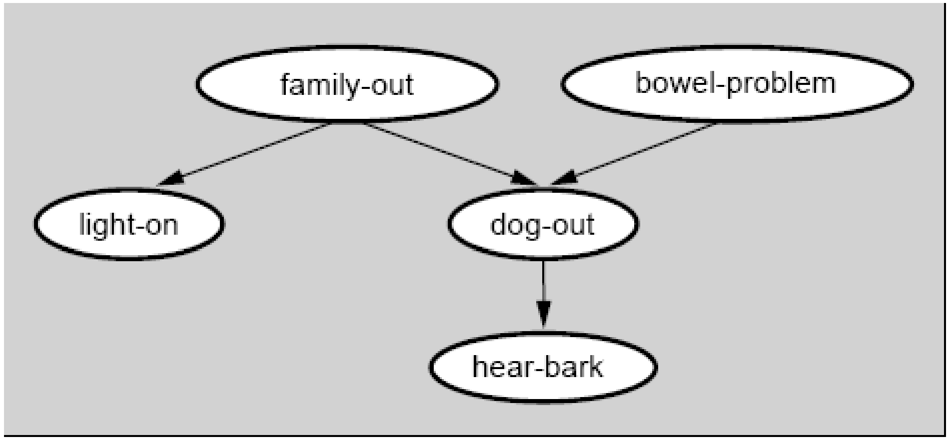


Figure 1. A Causal Graph.

Por ejemplo ¿ son fo y bp dependientes ?
i.e. ¿ $P(fo \mid bp) \neq P(fo)$?

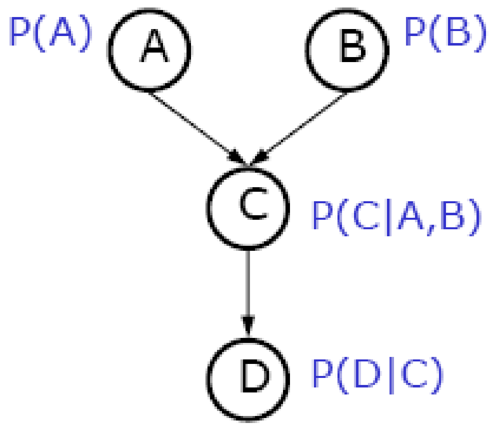
esp. NO ya que no existe un camino d-con de fo a bp dada E=

Si E=do, entonces si hay un camino d-conectado

Caminos d-conectados y regla de la cadena

- Variables: $V_1, \ldots, V_n$
- Values: $v_1, \ldots, v_n$
- $P(V_1=v_1, V_2=v_2, \ldots, V_n=v_n) = \prod_i P(V_i=v_i \mid \text{parents}(V_i))$

$P(ABCD) = P(A=true, B=true, C=true, D=true)$



$P(ABCD) =$

$P(D|ABC)P(ABC) =$

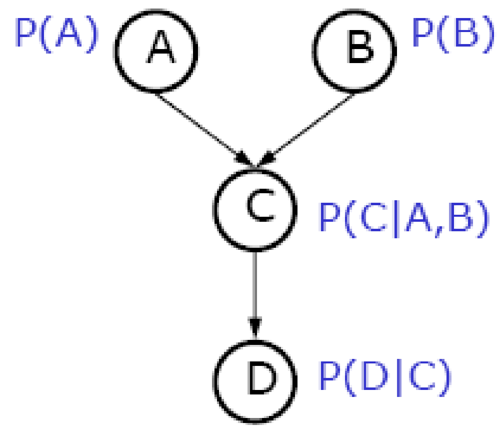
$P(D|C) \quad P(ABC) =$

A d-separated from D given C

B d-separated from D given C

Caminos d-conectados y Regla de la Cadena

- Variables: $V_1, \ldots, V_n$
- Values: $v_1, \ldots, v_n$
- $P(V_1=v_1, V_2=v_2, \ldots, V_n=v_n) = \prod_i P(V_i=v_i \mid \text{parents}(V_i))$



$P(ABCD) = P(A=\text{true}, B=\text{true}, C=\text{true}, D=\text{true})$

$P(ABCD) =$

$P(D|ABC)P(ABC) =$

$P(D|C) \quad P(ABC) =$

$P(D|C) \quad P(C|AB)\, P(AB) =$

$P(D|C) \quad P(C|AB)\, P(A)P(B)$

A d-separated from D given C

B d-separated from D given C

A d-separated from B

Ejercicio

Dada la siguiente red causal:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

Ahora invertimos el orden de las variables y obtenemos la siguiente red Bayesiana:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & B \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

¿Qué arcos podemos simplificar en esta red?

Ejercicio

Dada la siguiente red causal:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

Ahora invertimos el orden de las variables y obtenemos la siguiente red Bayesiana:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & B \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

¿Qué arcos podemos simplificar en esta red?

Respuesta:

$$C \longrightarrow B \longrightarrow A$$

Ejercicio

Dada la siguiente red causal:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

Invertimos nuevamente el orden de las variables y obtenem
la siguiente red Bayesiana:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & B \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

¿Qué arcos podemos simplificar en esta red?

Respuesta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & C & A \end{tikzcd}$$

Inferencia Probabilística

- ¿Qué tan probable es x dado que tenemos la evidencia y?
  - Calcular $P(x|y)$ de la red
- ¿Cuál entre y o z es la causa más probable de x?
  - Comparar $P(y|x)$ vs. $P(z|x)$