

Guía de Dependencias Funcionales

Prof. Claudio Gutiérrez, Aux. Mauricio Monsalve

Primavera 2007

1. Problemas conceptuales

1. ¿Cuál es la definición formal de una dependencia funcional?
2. ¿Cuáles son los Axiomas de Armstrong?
3. Sea A la llave del esquema $R(A,B,C)$. ¿Qué dependencias funcionales implica la llave?
4. En una relación binaria 1:N (o sea, de cardinalidades (1,1) y (0,n) ó (1,n)), ¿qué dependencia funcional se cumple? ¿Cuál sería la llave de tal tipo de relación?

2. Dependencias por definición

1. Sean las dependencias $A \rightarrow B$ y $BC \rightarrow D$. Pruebe que $AC \rightarrow D$ por definición.
2. Sean las dependencias $A \rightarrow BC$, $B \rightarrow D$, $C \rightarrow E$. Pruebe que $A \rightarrow DE$ por definición.
3. Sean las dependencias $A \rightarrow BC$, $B \rightarrow D$, $AC \rightarrow E$. Pruebe que $A \rightarrow DE$ por definición.
4. Sea el esquema $R(A, B, C)$, el cual tiene sólo una tupla. Encuentre todas sus dependencias funcionales.
5. Pruebe que los Axiomas de Armstrong son correctos usando la definición de las dependencias funcionales.
6. Pruebe que los Axiomas de Armstrong originales¹ son correctos usando la definición. Los axiomas originales son:

a) $A_1A_2\dots A_n \rightarrow A_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

b) $A_1\dots A_n \rightarrow B_1\dots B_m \Leftrightarrow A_1\dots A_n \rightarrow B_k, \forall k \in \{1, \dots, m\}$

c) $A_1\dots A_n \rightarrow B_1\dots B_m \wedge B_1\dots B_m \rightarrow C_1\dots C \Rightarrow A_1\dots A_n \rightarrow C_1\dots C$

¹W. Armstrong. "Dependency Structures of Data Base Relationships." Proc. IFIP Congress, 1974.

3. Axiomas de Armstrong

1. Sean las dependencias $AB \rightarrow C$, $CD \rightarrow E$, $DE \rightarrow F$. Pruebe que $ABD \rightarrow F$.
2. Sean las dependencias $A \rightarrow BC$, $B \rightarrow D$, $C \rightarrow E$, $CD \rightarrow F$, $EF \rightarrow G$. Pruebe que $A \rightarrow G$.
3. Sean las dependencias $A \rightarrow D$, $B \rightarrow AE$, $CF \rightarrow B$, $D \rightarrow A$, $E \rightarrow F$, $F \rightarrow D$. Pruebe que $CE \rightarrow AB$.
4. Pruebe la equivalencia de los axiomas de Armstrong originales con los usados actualmente ($\Leftarrow y \Rightarrow$). Los axiomas originales son:

$$a) A_1A_2\dots A_n \rightarrow A_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$b) A_1\dots A_n \rightarrow B_1\dots B_m \Leftrightarrow A_1\dots A_n \rightarrow B_k, \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

$$c) A_1\dots A_n \rightarrow B_1\dots B_m \wedge B_1\dots B_m \rightarrow C_1\dots C \Rightarrow A_1\dots A_n \rightarrow C_1\dots C$$

4. Aplicaciones en el modelo relacional

1. Sea el esquema de relación $R(A, B, C, D)$ y su conjunto de dependencias $F = \{A \rightarrow C, BC \rightarrow D, D \rightarrow B\}$. Indique todas las llaves alternas (minimales) de R.
2. Sea el esquema de relación $R(A, B, C, D)$ y su conjunto de dependencias $F = \{A \rightarrow C, D \rightarrow C, AC \rightarrow B\}$. Encuentre la clausura de F, o sea, F^+ .
3. Sea el esquema $R(\underline{A}, B, C, D, E)$. Se sabe, además, que se cumple $C \rightarrow B$, $DE \rightarrow A$. Indique todas las llaves alternas.

5. Soluciones selectas

1.1 Dependencia funcional: $A, B \in Esq(R) : (\forall t_1, t_2 \in r, t_1[A] = t_2[A] \Rightarrow t_1[B] = t_2[B]) \Rightarrow A \rightarrow B$

1.3 Básicamente, $A \rightarrow BC$ y cualquier dependencia derivada:

$$A \rightarrow A, A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \rightarrow AB, A \rightarrow AC, A \rightarrow BC, A \rightarrow ABC,$$

$$AB \rightarrow A, AB \rightarrow B, AB \rightarrow C, AB \rightarrow AB, AB \rightarrow AC, AB \rightarrow BC, AB \rightarrow ABC,$$

$$AC \rightarrow A, AC \rightarrow B, AC \rightarrow C, AC \rightarrow AB, AC \rightarrow AC, AC \rightarrow BC, AC \rightarrow ABC,$$

$$ABC \rightarrow A, ABC \rightarrow B, ABC \rightarrow C, ABC \rightarrow AB, ABC \rightarrow AC, ABC \rightarrow BC, ABC \rightarrow ABC.$$

2.1 $\forall s, t \in r(R), R(A, B, C, D, \dots)$. De las dependencias dadas: (1) : $s[A] = t[A] \Rightarrow s[B] = t[B]$, (2) : $s[BC] = t[BC] \Rightarrow s[D] = t[D]$. Ahora veamos qué ocurre con AC: (3) : $s[AC] = t[AC] \Leftrightarrow s[A] = t[A] \wedge s[C] = t[C]$ (pues dos tuplas son iguales ssi cada par de componentes correspondientes es igual, tal como la igualdad de vectores). Haciendo silogismo de (1) y (3): $s[AC] = t[AC] \Rightarrow s[B] = t[B] \wedge s[C] = t[C]$. Por la definición de equivalencia: $s[AC] = t[AC] \Rightarrow s[BC] = t[BC]$. Usando (2): $s[AC] = t[AC] \Rightarrow s[BC] = t[BC]$. Luego, por definición, $AC \rightarrow BC$. ■

2.4 Toda dependencia funcional $V \rightarrow W$ se cumple, con $V, W \subseteq Esq(R)$, $V, W \neq \emptyset$. Como se descarta el conjunto vacío para cada lado, son $(2^3 - 1)^2 = 49$ combinaciones que no se presentarán aquí.

3.1 $ABD \rightarrow AB(\text{trivial})$, y $AB \rightarrow C(\text{dato}) \Rightarrow ABD \rightarrow C(\text{transitividad})$.
 $ABD \rightarrow C$ y $ABD \rightarrow D(\text{trivial}) \Rightarrow ABD \cup ABD \rightarrow C \cup D(\text{agrupacion}) = ABD \rightarrow CD$.
 $ABD \rightarrow CD$ y $CD \rightarrow E(\text{dato}) \Rightarrow ABD \rightarrow E(\text{transitividad})$.
 $ABD \rightarrow D(\text{trivial})$ y $ABD \rightarrow E \Rightarrow ABD \rightarrow DE(\text{agrupacion})$.
 $ABD \rightarrow DE$ y $DE \rightarrow F(\text{dato}) \Rightarrow ABD \rightarrow F(\text{transitividad})$. ■

3.3 $CE \rightarrow E(\text{trivial})$ y $E \rightarrow F(\text{dato}) \Rightarrow CE \rightarrow F(\text{transitividad})$. (★)
 $CE \rightarrow F$ y $F \rightarrow D(\text{dato}) \Rightarrow CE \rightarrow D(\text{transitividad})$.
 $CE \rightarrow D$ y $D \rightarrow A(\text{dato}) \Rightarrow CE \rightarrow A(\text{transitividad})$. (○)
 $CE \rightarrow C(\text{trivial})$ y $CE \rightarrow F(\star) \Rightarrow CE \rightarrow CF(\text{agrupacion})$.
 $CE \rightarrow CF$ y $CF \rightarrow B(\text{dato}) \Rightarrow CE \rightarrow B(\text{transitividad})$.
 $CE \rightarrow B$ y $CE \rightarrow A(\circ) \Rightarrow CE \rightarrow AB(\text{agrupacion})$. ■

4.1 Las llaves son AB y AD.

4.3 La llave primaria es AB. Otras llaves son AC, BDE, CDE.