Cálculo de Predicados (1)

Carlos Hurtado L.
Depto de Ciencias de la Computación, Universidad de Chile

Language	Ontological commitment (what exists in the world)
Propositional logic	Facts
First-order logic	Facts, objects, relations
Temporal logic	Facts, objects, relations, times
Probability theory	Facts
Fuzzy logic	Degree of truth

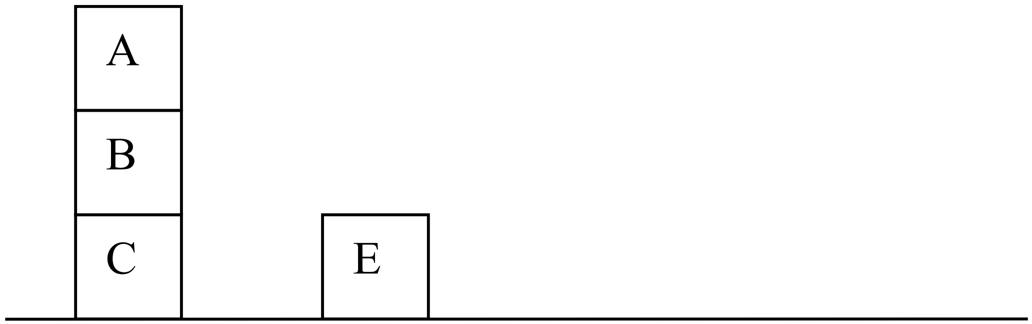
Sintaxis de la Lógica de Primer Orden

- Vocabulario
- Términos
- Atomos
- Formulas

Sintaxis: Vocabulario

- Símbolos para referirnos a individuos (objetos):
  - Constantes
  - Funciones (F)
  - Variables (V)
- Símbolos para referirnos a relaciones entre individuos:
  - Predicados (P)
- Cada símbolo de predicado y función tiene una aridad: número de argumentos.
- Un vocabulario es una tripla (F,V,P).

Ejemplo: Mundo de los Bloques



- Vocabulario (F,P,V):
  - ***F = {a,b,c,e}***
  - ***P = {on,above,clear,ontable}***
  - ***V = {x,y,z, …}***

Sintaxis: Términos

- Un *término* es:
  - Una *variable*,
  - Una *constante*,
  - Una expresión *f*(*t*1, *t*2, …, *t*k) donde *f* es un símbolo de función de aridad *k* y cada ti es un término.
- *Ejemplos:*
  - *Juan, Padre(Juan), x, rating(hotel7), costo(hotel7).*

Sintaxis: Términos

- Un *término* denota un individuo del dominio.
- Las funciones nos permiten referenciar individuos indirectamente.

juan, padre(*juan*), *rating*(*hotel7*), *costo*(*hotel7*).

- A partir de funciones de aridad mayor que cero podemos generar un número infinito de términos.

padre(juan), padre(hermano(padre(juan))), …
padre(padre(padre(juan))), etc.

Sintaxis: Atomos

- Un *átomo* es una expresión

$$p(t1, \ldots, tk)$$

donde *p* es un símbolo de predicado de aridad *k* y cada *ti* es un término.

- Los átomos permiten referirnos a hechos que relacionan individuos.

Sintaxis: Fórmula

Una fórmula es:

- Un átomo.
- Una combinación Booleana de fórmulas (usando los conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$)

$\forall$ $\exists x.A$, donde x es una variable y A es una formula.

$\forall$ $\forall x.A$, donde x es variable y A es una fórmula.

Alcance

- Una fórmula *A* puede tener más de una ocurrencia de una misma variable.
  - Ejemplo: $\exists x.(P(x))\wedge Q(x)$ tiene dos ocurerrencias de X.
- El alcance de una ocurrencia es la subfórmula más grande que contiene a la ocurrencia no cuantificada.
  - Ejemplo: alcance de la primera ocurrencia de x en $\exists x.(P(x))\wedge Q(x)$ es P(X). Alcance de la segunda ocurrencia es toda la fórmula.

Renombramiento de Variables

- Por simplicidad, es conveniente renombrar variables de modo que cada variable tenga un único alcance.
  - Ejemplo: $\exists x.(P(x)) \wedge Q(x)$ se puede renombrar como $\exists x.(P(x)) \wedge Q(y)$

Sentencia

- Una variable es *libre* en una fórmula *A* si tiene una ocurrencia en *A* no cuantificada.
  - Ejemplo: x es libre en $\exists x.(P(x)) \wedge Q(x)$
- Denotamos como libre(*A*) el conjunto de variables libres de *A*
- Una fórmula sin variables libres se denomina *sentencia*.

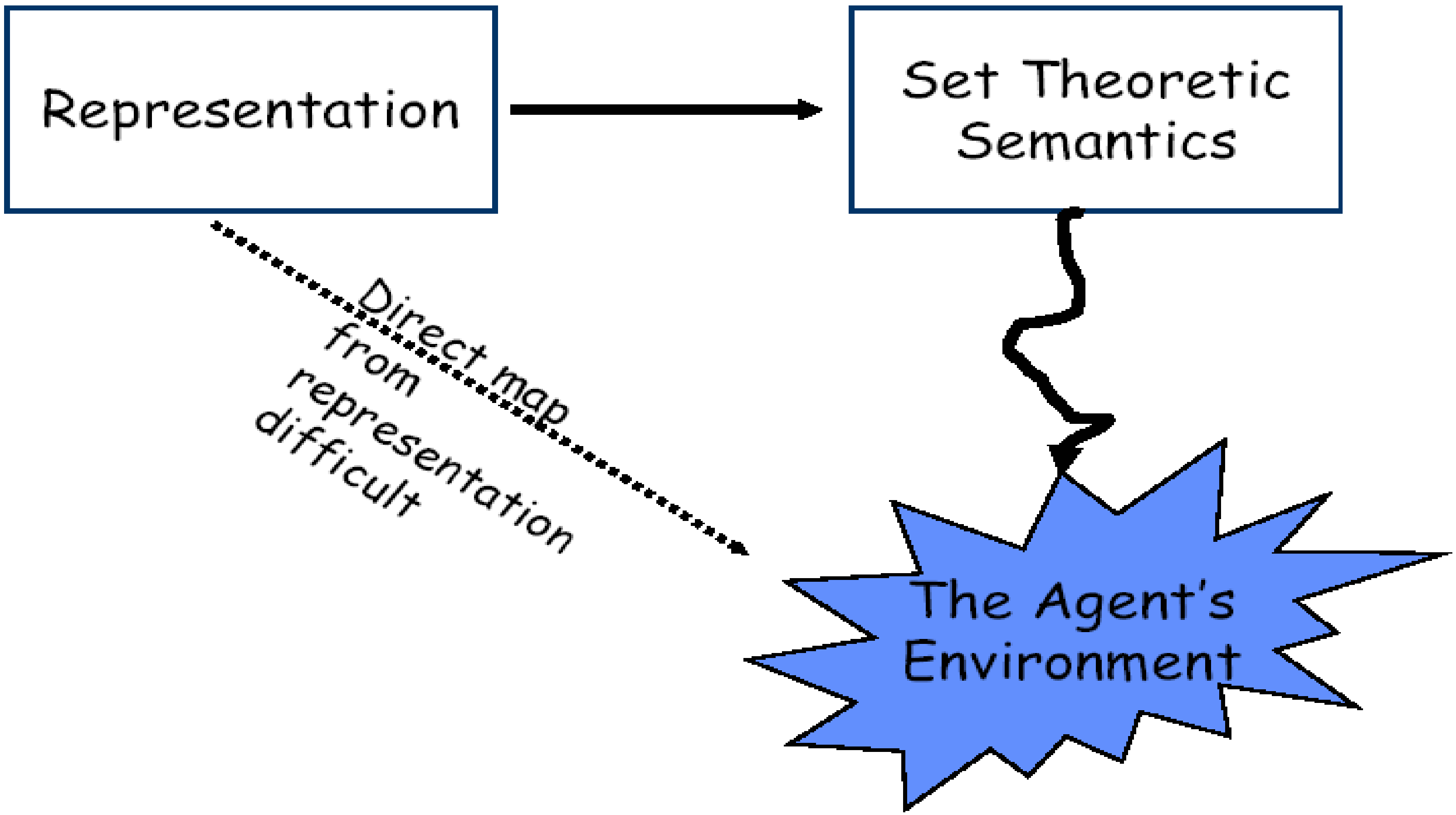
Fórmulas bien Formadas

- En una fórmula bien formada (FBF) en cada subfórmula de la forma $\exists x.B$ o $\forall x.B$, $x \notin libre(B)$.
- En adelante, supondremos que todas las fórmulas son FBF.

Semántica

- La semántica de la lógica de primer orden está dada por una interpretación.
  - Función que hace corresponder los términos y predicados de una fórmula a individuos y predicados de un mundo.
- Bajo una interpretación la fórmula toma un valor de verdad **V** o **F**.

Semántica "Set Theoretic"



Semántica: Interpretación

- Dado una fórmula *A* sobre un vocabulario (F,P,V), una *interpretación* es una tupla I=(D,φ,π,*μ*), donde:
  - D es un cojunto de individuos denominado *dominio*.
  - φ: F→(D^k→D), donde k es la aridad de f
  - π: P→(ConjPotencia(D^k)), donde k es la aridad de p
  - *μ*: libre(*A*)→D

Ejemplo: Mundo de los Bloques

- Vocabulario (F,P,V):
  - ***F = {a,b,c,e}***
  - ***P = {on,above,clear,ontable}***
  - ***V = {x,y,z, …}***

Ejemplo: Interpretación

Interpretación para $\forall x,y.(on(x, y) \Rightarrow above(x, y))$: I=(D,φ,π,μ), donde:

- D={A,B,C,E}
- φ:

  φ(a)=A, φ(b)=B, φ(c)=C, φ(e)=E
- π:

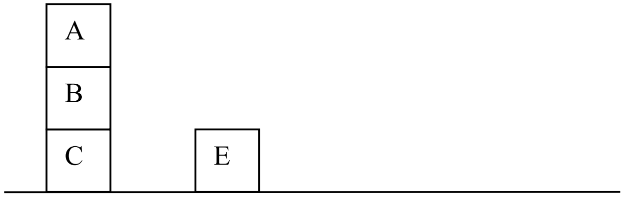
  π(on)={(A,B),(B,C)}

  π(above)={(A,B), (B,C) , (A,C)}

  π(clear) = {A,E}

  π(ontable) = {C,E}
- μ:

  vacía para las sentencias



Semántica de una Fórmula

- Al igual que en cálculo Proposicional, extenderemos una interpretación para que dada una fórmula obtengamos **V** o **F**.
- Daremos la semántica de:
  - términos
  - átomos y
  - fórmulas.

Semántica: Términos

Dado un vocabulario (F,P,V) y una interpretación I =(D,φ,π,μ):

- Cada constante c denota un individuo:

$$I(c) = \varphi(c) \text{ en } D$$

- Cada variable libre *x* denota un individuo:

$$I(x) = \mu(x) \text{ en } D$$

- Cada término t = f(t1, t2, …,tk) denota a un individuo :

$$I(t) = \varphi(f)(I(t1), I(t2), \ldots, I(tk)) \text{ en } D$$

- Ejemplo:

$$I(c)=\varphi(c)=C,\ I(a)=\varphi(a)=A, \text{ etc.}$$

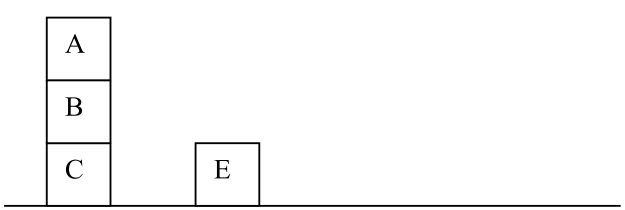
Semántica: Atomos

- Dado un átomos $a = p(t1, t2, \ldots, tk)$ tenemos

$I(a) = \mathbf{V}$, si $(I(t1), I(t2), \ldots, I(tk))$ está en $\pi(p)$

$I(a) = \mathbf{F}$, en caso contrario.

- Ejemplo: $I(on(a,b))=\mathbf{V}$ ya que $(I(a),I(b))$ está en $\pi(on)$.



Semántica: Fórmulas

Si A y B son fórmulas:

- I($\neg A$)=**V** sii I(A)=**F**
- I($A \wedge$B)=**V** sii I(A)=**V** y I(B)=**V**
- I($A \vee$B)=**V** sii I(A)=**V** o I(B)=**V** (se cumple al menos una de las dos)

Semántica: Fórmula

Si *A* es fórmula entonces:

- $I(\exists x.A)=V$ ssi existe *d* en *D* tal que $I'(A) = \mathbf{V}$ donde $I'=(D,\varphi,\pi,\mu')$ y $\mu' = \mu + \mu'(x)=d$.

- $I(\forall x.A)=V$ ssi para todo *d* en *D* tenemos $I'(A) = \mathbf{V}$ donde $I'=(D,\varphi,\pi,\mu')$ y $\mu'=\mu+\mu'(x)=d$.

Semántica: Fórmula Ejemplo

Si A es fórmula entonces:

- $\mathrm{I}(\forall x.A)=\mathrm{V}$ ssi para todo d en D tenemos $\mathrm{I}'(A) = \mathbf{V}$ donde $\mathrm{I}'=(\mathrm{D},\varphi,\pi,\mu')$ y $\mu'=\mu+\mu'(\mathrm{x})=\mathrm{d}$.

Ejemplo: $\mathrm{I}(\forall x,y.(on(x, y) \Rightarrow above(x, y))) = \mathbf{V}$, ya que para toda constante d,e:

$$\mathrm{I}'((on(d, e) \Rightarrow above(d, e))) = \mathbf{V}$$

Recordar que para la interpretación I:

$\pi(\mathrm{on})=\{(A,\mathrm{B}),(\mathrm{B},C)\}$

$\pi(\mathrm{above})=\{(A,\mathrm{B}), (\mathrm{B},C) , (A,C)\}$

Ejemplo: Mundo de los Bloques

- Dada la sentencia *A*:

$$\forall x,y.(on(x, y) \Rightarrow above(x, y))$$

- Sea I la interpretación dada anteriormente
- Es fácil verificar que I(*A*)=**V**.

Satisfabilidad y Validez

- Una interpretación I satisface una fórmula S ssi I(S)=V.
  - En este caso decimos que I es un modelo de S.
  - Denotamos como M(S) al conjunto de modelos de S.
- S es satisfacible ssi existe una interpretación I tal que I(S)=V
  - S tiene al menos un modelo
- S es válida (o es tautología) ssi para toda interpretación I, I(S) =V.
  - Todas las interpretaciones son modelos de S

Consecuencia Lógica

- Una fórmula S es consecuencia lógica de una fórmula P, denotado P$\models$ S ssi

$$M(P) \subseteq M(S)$$

- S es equivalente a P ssi P $\models$ S y S $\models$ P

Ejemplo: Consecuencia Lógica

- Sea $KB=\{on(b,c), on(c,d), clear(e), \forall x,y,z.(on(x, y) \wedge on(y, z) \Rightarrow above(x, z))\}$.
- ¿$KB \models above(b,d)$?
- Sea I un modelo tal que $I \models KB$,
- *Luego* $I \models on(b, c) \wedge on(c, d)$.
- Por lo tanto, $I \models above(b, d)$.

Algunas Equivalencias

$\forall x \neg P \Leftrightarrow \neg \exists x\, P$

$\neg \forall x\, P \Leftrightarrow \exists x \neg P$

$\forall x\, P \Leftrightarrow \neg \exists x \neg P$

$\exists x\, P \Leftrightarrow \neg \forall x \neg P$

$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Orden de Cuantificadores

- Orden de cuantificadores del mismo tipo no importa. Ejemplo:

$$\forall x \forall y (Parent(x,y) \wedge Male(y) \Rightarrow Son(y,x))$$
$$\exists x \exists y (Loves(x,y) \wedge Loves(y,x))$$

- Orden de cuantificadores de distinto tipo importa. Ejemplo:

$\forall x \exists y (Loves(x,y))$ $\exists y \forall x (Loves(x,y))$

Cláusulas en Lógica de Predicados

- Cláusulas en cálculo de predicados:

$$\forall x1, x2, \ldots, xn.(A1 \vee A2 \vee \ldots An),$$

donde cada Ai es un literal (átomo positivo o negativo) que puede contener ocurrencias de variables xi's.

- Usamos notación similar a Cálculo de Predicados.
- Ejemplos:

$$(P(Juan), Q(Pedro), R(X))$$

$$(\neg P(Y), R(Suzana), R(Y))$$

- Toda fórmula puede ser transformada en una cláusula equivalente.
- Una cláusulas base es una cláusula que no tienen variables.

Transformación en CNF: Caso Proposicional

Pasos:

2. Eliminar $\Leftrightarrow$
3. Eliminar $\Rightarrow$
4. Usar leyes de De Morgan para mover los $\neg$'s a los átomos
5. Eliminar doble negaciones
6. Distribuir $\vee$ sobre $\wedge$

Ejemplo: Caso Proposicional

$$\neg((A_1 \equiv A_2) \wedge \neg(A_3 \vee \neg (A_4 \rightarrow A_1)))$$

Pasos 1 y 2:

$$\neg(((A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2))) \wedge \\ \neg(A_3 \vee \neg(\neg A_4 \vee A_1)))$$

Pasos 3 y 4:

$$\neg((A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2)) \vee (\neg A_3 \wedge (\neg A_4 \vee A_1))$$

$$(\neg(A_1 \wedge A_2) \wedge \neg(\neg A_1 \wedge \neg A_2)) \vee (A_3 \vee (A_4 \wedge \neg A_1))$$

$$((\neg A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee A_2) \vee (A_3 \vee (A_4 \wedge \neg A_1))$$

Ejemplo: Caso Proposicional (cont.)

$$((\neg A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee A_2) \vee (A_3 \vee (A_4 \wedge \neg A_1))$$

Paso 5:

$$((\neg A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_1 \vee A_2)) \vee ((A_3 \vee A_4) \wedge (A_3 \vee \neg A_1))$$

$$(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3 \vee A_4) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3 \vee \neg A_1) \wedge$$
$$(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \neg A_1)$$

Simplificando:

$$(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3 \vee A_4) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge$$
$$(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4)$$

Conversión a CNF,DNF

	CNF	DNF	General
Satisfiability	NPC	$\Theta(n)$	NPC
Tautology	$\Theta(n)$	NPC	NPC
Conversion of an arbitrary wff to ..	$\Theta(2^n)$	$\Theta(2^n)$	–

Resolución en Cálculo de Predicados

- Podemos resolver las siguientes dos cláusulas:

  A: (P(Juan),Q(Pedro),R(X))

  B: (¬ P(Y),R(Suzana),R(Y)) ?

- Intuitivamente, B representa un conjunto de cláusulas base:

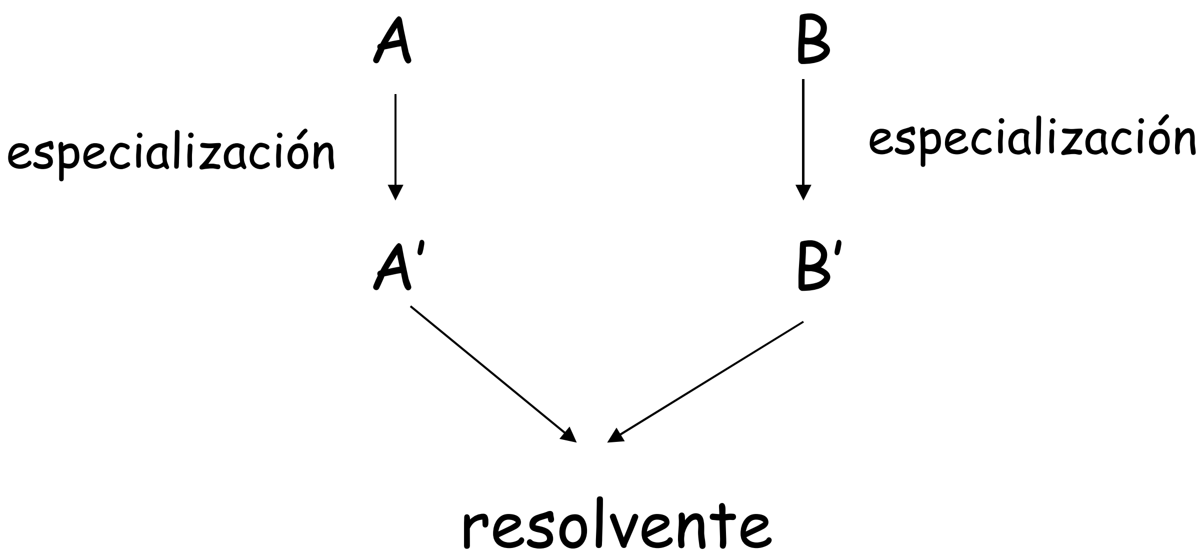
  B1: (¬ P(Pedro),R(Suzana),R(Pedro))

  B2: (¬ P(Juan),R(Suzana),R(Juan))

  … etc

- Luego existe una “especialización” de B que puede ser resuelta con A.

Resolución en Cálculo de Predicados



Pero si la especialización es mayor que la necesaria perdemos información al resolver.

Ejemplo

A: $(\neg P(x), S(x), Q(Pedro))$

B: $(P(Y), R(Y))$

- Posibles resolventes:
  - C1: (S(Juan),Q(Pedro),R(Juan)) vía {y/Juan,x/Juan}
  - C2:(S(x),Q(Pedro),R(x)) vía {y/x}
- La cláusula *C2* contiene más información que *C1* (de *C2* se puede deducir más que de *C1*). Decimos que *C2* domina a *C1*.
- Resolución en cálculo de predicados consiste en encontrar el resolvente que domina a todos los posibles resolventes.