Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

Notación: Estructura inducida

Por el momento sólo vamos a considerar vocabularios sin constantes.

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

Decimos que $\mathfrak{B}$ es la sub-estructura de $\mathfrak{A}$ inducida por B si $B \subseteq A$ y para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k: $R^B = R^A \cap B^k$.

Notación: Isomorfismo

Dado: $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y una función $f : A \to B$.

Decimos que f es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si:

- f es una biyección.
- Para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k y $\bar{a} \in A^k$, se tiene que $\bar{a} \in R^A$ si y sólo si $f(\bar{a}) \in R^B$.

Notación: $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas, denotado como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe un isomorfismo f de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$

Notación: Isomorfismo parcial

Dado: Tuplas $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ en $\mathfrak{A}$ y $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ en $\mathfrak{B}$.

Decimos que $(\bar{a}, \bar{b})$ es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si la función f definida como $f(a_j) = b_j$ es un isomorfismo entre las sub-estructuras de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ inducidas por $\bar{a}$ y $\bar{b}$, respectivamente.

- Restringidas a $\bar{a}$ y $\bar{b}$, las estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se ven iguales.

Ejercicio: Sea $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, 2, 3, 4\}, <^A \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, <^B \rangle$.
¿Es ((1,3),(2,5)) un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$?

Notación: Rango de cuantificación

El rango de cuantificación de una $\mathcal{L}$-fórmula φ, $rc(\varphi)$, se define como:

- Si φ es atómica, entonces $rc(\varphi) = 0$.
- Si $\varphi = \neg\psi$, entonces $rc(\varphi) = rc(\psi)$.
- Si $\varphi = \psi \vee \theta$, entonces $rc(\varphi) = \max\{rc(\psi), rc(\theta)\}$.
- Si $\varphi = \exists x\, \psi$, entonces $rc(\varphi) = 1 + rc(\psi)$.

Ejercicio: ¿Cuáles son los rangos de cuantificación de $\exists x \forall y\, P(x, y)$ y $(\exists x\, P(x)) \wedge (\neg \exists y\, Q(y))$?

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

Tablero	:	$\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (**D**) y Spoiler (**S**)
Número de rondas	:	$k \geq 0$ (parámetro del juego)

En cada ronda:

1. **S** elije una estructura y un punto en esa estructura.

2. **D** responde con un punto en la otra estructura.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

Sean $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ y $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

Entonces **S** gana el juego si $(\bar{a}, \bar{b})$ no es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- En caso contrario gana **D**.

¿Qué están tratando de hacer **S** y **D**?

Decimos que **D** tiene una estrategia ganadora en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé de k rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si para cada posible forma de jugar de **S**, existe una forma de jugar de **D** que le permite ganar.

Notación: $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Ejercicios

1. Sean $\mathfrak{A} = \langle\{1, 2, 3, 4\}\rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle\{1, 2, 3, 4, 5\}\rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$? ¿Qué sucede con $\mathfrak{A} \equiv_5 \mathfrak{B}$?

2. Sean $\mathfrak{A} = \langle\{1, 2, 3, 4\}, P^A = \{1, 2\}\rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle\{1, 2, 3, 4, 5\}, P^B = \{3, 5\}\rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$? ¿Qué sucede con $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$?

3. Sean $\mathfrak{A} = \langle\{1, 2, 3\}, R^A = \{(1, 2), (2, 3)\}\rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle\{1, 2, 3, 4\}, R^B = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}\rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$? ¿Qué sucede con $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$?

4. En el ejercicio anterior, suponga que A y B tienen k y $k + 1$ elementos, respectivamente. ¿Existe algún valor de k para el cual $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$?

Juegos y la lógica de primer orden

¿Por qué nos interesan los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé?

- Si $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces para cada oración φ tal que $rc(\varphi) = k$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi.$$

¿Por qué es esto cierto?

- Idea: Sea $\varphi = \forall x \exists y\, R(x, y)$, $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Demuestre que $\mathfrak{A} \not\equiv_2 \mathfrak{B}$.

¿Cómo podemos usar este teorema?

Juegos y el poder expresivo de una lógica

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y propiedad $\mathcal{P}$ de las $\mathcal{L}$-estructuras.

Queremos demostrar que $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden.

Metodología:

- Suponga que $\mathcal{P}$ si es expresable. Entonces existe φ tal que para todo $\mathfrak{A} \in \text{struct}[\mathcal{L}]$: $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.

  Suponga que $rc(\varphi) = k$.

- Encuentre estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tales que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ pero $\mathfrak{B} \notin \mathcal{P}$.

Se puede concluir que φ no representa a $\mathcal{P}$. ¿Por qué?

Juegos y el poder expresivo de una lógica

Ejercicio: Sea $\mathcal{L} = \{U(\cdot)\}$ y $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-estructuras que tienen una cantidad par de elementos en U. Demuestre que $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden.

Pregunta: ¿Qué tan buena es la metodología? ¿Qué tan cercanos son los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé a la lógica de primer orden?