

Métodos Lógicos para Ciencias de la Computación - IIC2212
Control 1

1. Dado $\Sigma \subseteq L(P)$ y $\alpha, \beta \in L(P)$ tal que α y $\Sigma \cup \{\beta\}$ no tienen variables proposicionales en común.

a) ¿Es cierto que $\Sigma \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$?

Solución: No, esto es falso. Tome $\Sigma = \emptyset$, $\alpha = \{q \wedge \neg q\}$, y $\beta = p$. Luego, $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$, pero $\Sigma \not\models \beta$.

b) ¿Qué pasa si α es satisfacible?

Solución: En este caso sí es cierto. La dirección de izquierda a derecha sigue del teorema de monotonía. Para la dirección de derecha a izquierda asuma que $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ y tome una valuación cualquiera σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. Dado que α es satisfacible existe valuación σ' tal que $\sigma'(\{\alpha\}) = 1$. Defina una valuación σ'' tal que

$$\sigma''(p) = \begin{cases} \sigma(p) & \text{si } p \notin \alpha \\ \sigma'(p) & \text{si } p \in \alpha \end{cases}$$

Como Σ y $\{\alpha\}$ no tienen variables proposicionales en común es posible demostrar que σ'' satisface a $\Sigma \cup \{\alpha\}$, i.e. $\sigma''(\Sigma \cup \{\alpha\}) = 1$. Luego, $\sigma''(\beta) = 1$, y como $\{\alpha\}$ y β no tienen variables proposicionales en común concluimos que $\sigma(\beta) = 1$.

2. Decimos que una fórmula φ está en 3-CNF si φ está en CNF y cada una de sus cláusulas contiene a lo más tres literales. Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s)$ está en 3-CNF mientras que $(p \vee \neg q \vee \neg r \vee s)$ no está en 3-CNF.

Demuestre que existen fórmulas que no son equivalentes a ninguna fórmula en 3-CNF.

Solución: Fácil. Ocupa principio del cajón solamente.

3. Considere una valuación $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$. Demuestre que el conjunto $S = \{\phi \mid \phi \in L(P), \sigma(\phi) = 1\}$ satisface lo siguiente:

Para todo conjunto S' de fórmulas en $L(P)$ se tiene que si $S \subseteq S'$ y S' es satisfacible, entonces $S = S'$.

Solución: Asuma por contradicción que $S \subsetneq S'$. Luego, existe fórmula $\phi \in S' \setminus S$. Pero como $\phi \notin S$ se sigue que $\sigma(\phi) = 0$. Por tanto, $\sigma(\neg\phi) = 1$ y $\neg\phi \in S$. Concluimos que ϕ y $\neg\phi$ pertenecen a S' , lo que es una contradicción porque S' es satisfacible.

4. Sean Σ_0 y Σ_1 dos conjuntos satisfacibles de fórmulas en $L(P)$, tal que para toda fórmula $\phi \in L(P)$ se tiene que

$$\Sigma_1 \models \phi \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma_2 \models \phi.$$

Use el teorema de compacidad para demostrar que $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ también es satisfacible.

Solución: Asuma por contradicción que $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ es inconsistente. Luego, por teorema de compacidad existe un subconjunto finito $\Sigma \subseteq \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ que es inconsistente. Dado que ambos Σ_1 y Σ_2 son satisfacibles, se sigue que Σ es de la forma $\alpha_1 \cup \alpha_2$, donde α_1 es un subconjunto finito y no-vacío de Σ_1 y α_2 es un subconjunto finito y no vacío de Σ_2 .

Defina ϕ como $\bigwedge_{\beta \in \alpha_2} \beta$. Es claro que $\Sigma_2 \models \phi$ ya que toda fórmula en α_2 está en Σ_2 . Además, $\Sigma_1 \not\models \phi$. De no ser así, y dado que Σ_1 es satisfacible, existiría valuación σ tal que $\sigma(\Sigma_1 \cup \alpha_1) = \sigma(\alpha_1 \cup \alpha_2) = 1$, lo que es una contradicción porque $\alpha_1 \cup \alpha_2$ es inconsistente.

Luego, existe ϕ tal que $\Sigma_1 \not\models \phi$ y $\Sigma_2 \models \phi$. Esto contradice nuestra hipótesis.