

Existencia de problemas no decidibles

La demostración anterior no es constructiva.

- Sabemos que existe un problema indecidible, pero no sabemos como es este lenguaje.

Vamos a construir un lenguaje indecidible.

- Usamos diagonalización.

Codificación de una máquina de Turing

Primero tenemos que introducir algo de terminología.

Supongamos que $M = (Q, A, q_1, \delta, F)$, donde

- $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$.
- $A = \{0, 1\}$.
- $F = \{q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_m}\}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$.

Definimos una palabra $C(M) = w_Q 00 w_\delta 00 w_F$ que representa a M .

Codificación de una máquina de Turing

- w_Q :

001001100...00 $\underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ veces}}$

- w_δ : Usamos 1 para representar símbolo 0, 11 para símbolo 1 y 111 para símbolo B. También usamos 1 para representar I y 11 para D .

w_δ es de la forma $w_1 \dots w_k$, donde cada w_i representa una transición. Por ejemplo, si $\delta(q_i, 0) = (q_j, B, I)$, entonces la siguiente palabra representa esta transición:

00 $\underbrace{1 \dots 1}_{i \text{ veces}}$ 00100 $\underbrace{1 \dots 1}_{j \text{ veces}}$ 00111001

Codificación de una máquina de Turing

En cambio, si $\delta(q_i, 1) = (q_j, 0, D)$, entonces la siguiente palabra representa la transición:

$$00 \underbrace{1 \dots 1}_{i \text{ veces}} 001100 \underbrace{1 \dots 1}_{j \text{ veces}} 0010011$$

- w_F :

$$00 \underbrace{1 \dots 1}_{i_1 \text{ veces}} 00 \underbrace{1 \dots 1}_{i_2 \text{ veces}} 00 \dots 00 \underbrace{1 \dots 1}_{i_m \text{ veces}}$$

Codificación de una máquina de Turing: Ejemplo

Sea $M = (Q, A, q_1, \delta, F)$, donde $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $A = \{0, 1\}$, $F = \{q_3\}$ y δ es definido de la siguiente forma:

$$\begin{array}{llll} \delta(q_1, 0) & = & (q_1, 0, D) & \delta(q_2, B) & = & (q_3, B, I) \\ \delta(q_1, 1) & = & (q_2, 1, D) & \delta(q_2, 0) & = & (q_4, 0, I) \\ \delta(q_2, 1) & = & (q_4, 1, I) & & & \end{array}$$

Entonces: $C(M) = w_Q 00 w_\delta 00 w_F$, donde:

$$w_Q = 001001100111001111$$

$$w_F = 00111$$

$$\begin{aligned} w_\delta = & 00100100100100110010011001100110011 \\ & 00110011100111001110010011001001111001001 \\ & 001100110011110011001 \end{aligned}$$

Un problema indecidible: Problema de la parada

Problema natural: Dada una máquina de Turing M y una palabra w , ¿se detiene M con entrada w ?

Como problema de decisión: Consideramos máquinas de Turing con alfabeto $\{0, 1\}$. Entonces,

$$U = \{w' \in \{0, 1\}^* \mid \text{existe una MT } M \text{ y } w \in A^* \text{ tal que} \\ w' = C(M)0000w \text{ y } M \text{ se detiene con entrada } w\}.$$

¿Es este problema decidable?

- Vamos a demostrar que no, pero para eso vamos a considerar primero un problema más simple.

Un problema de decisión más simple

Otro problema de decisión: dada una máquina de Turing M , ¿es cierto que M se detiene con entrada $C(M)$?

Le damos como entrada a M su propio código, ¿es válido hacer esto?

- Sí, $C(M)$ es una palabra como cualquier otra.

Como problema de decisión:

$$H = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{existe una MT } M \text{ tal que} \\ w = C(M) \text{ y } M \text{ se detiene con entrada } C(M)\}.$$

Un problema de decisión más simple: Demostración

Teorema: H es indecidible, vale decir, no existe una máquina de Turing M que se detiene en todas las entradas y tal que $H = L(M)$.

Demostración: Por contradicción, asuma que existe una MT M^* que se detiene en todas las entradas y tal que $H = L(M^*)$.

Vale decir: para cada MT M , si M se detiene con su propio código, entonces M^* con entrada $C(M)$ se detiene en un estado final. En caso contrario, M^* se detiene en un estado que no es final.

Un problema de decisión más simple: Demostración

Sea M_0 una MT que con entrada w funciona de la siguiente forma:

hace funcionar la máquina M^* con entrada $C(M_0)$
si M^* se detiene en un estado final
entonces M_0 no se detiene
en caso contrario M_0 se detiene en un estado final

¿Es posible construir M_0 ? ¿Cómo?

Un problema de decisión más simple: Demostración

La pregunta ahora es si M^* acepta M_0 :

M^* acepta M_0

si y sólo si

M_0 se detiene con entrada $C(M_0)$

si y sólo si

M^* se detiene en un estado no final con entrada $C(M_0)$

si y sólo si

M^* no acepta M_0

¡Tenemos una contradicción!

Un problema indecidible: Problema de la parada

Podemos concluir que nuestro problema original U es indecidible.

- ¿Por qué?

Pero, ¿cómo demostramos formalmente que U es indecidible?

Tenemos que formalizar el concepto de **reducción**.

La noción de reducción

Dado: Lenguajes L_1 y L_2 con alfabeto A .

Intuición: Decimos que un lenguaje L_1 es **reducible** a un lenguaje L_2 si existe un algoritmo tal que dado $w_1 \in A^*$, calcula $w_2 \in A^*$ tal que **$w_1 \in L_1$ si y sólo si $w_2 \in L_2$** .

Para formalizar esta idea necesitamos introducir la noción de **algoritmo que calcula**.

- Tenemos que introducir máquinas de Turing que calculan.

Máquinas de Turing que calculan

Una MT M calcula una función $f : A^* \rightarrow A^*$ si:

con entrada $w \in A^*$, la máquina se detiene en un estado final teniendo en la memoria una cadena infinita de símbolos B seguida de $f(w)$ seguida de otra cadena infinita de símbolos B .

Decimos que una función f es **computable** si es que existe una máquina de Turing que calcula f .

Máquinas de Turing que calculan: Ejemplo

Sea $g : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ una función definida como $g(w) = w0000$.

Queremos demostrar que g es computable.

Sea $M = (Q, A, q_1, \delta, F)$, donde

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_F\}$.
- $A = \{0, 1\}$.
- $F = \{q_F\}$.
- δ es definida como:

$$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$$

$$\delta(q_2, B) = (q_3, 0, D)$$

$$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, D)$$

$$\delta(q_3, B) = (q_4, 0, D)$$

$$\delta(q_1, B) = (q_2, 0, D)$$

$$\delta(q_4, B) = (q_F, 0, D)$$

Es fácil verificar que M calcula g .

La noción de reducción: Formalización

Dado: Lenguajes L_1 y L_2 con alfabeto A .

Definición: L_1 es **reducible** a L_2 si existe una función computable f tal que para todo $w \in A^*$:

$$w \in L_1 \text{ si y sólo si } f(w) \in L_2.$$

Corolario: Asuma que L_1 es reducible a L_2 .

- Si L_2 es decidable entonces L_1 es decidable.
- Si L_1 es indecidible entonces L_2 es indecidible.

Ejercicio: Demuestre el corolario.

El problema de la parada: Demostración

Por fin estamos listos para demostrar que el problema de la parada U es indecidible.

Demostración: Sea $g : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ definida como $g(w) = w0000w$.

Es fácil ver que g es computable y es una reducción de H a U .

Dado que H es indecidible, concluimos que U es indecidible.