

El teorema de isomorfismo

Si dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas, entonces son idénticas excepto por sus dominios.

- $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son **indistinguibles**.

En particular: La lógica de primer orden no debería poder distinguir entre estructuras isomorfas.

- Vamos a demostrar esto.
- ¿Por qué este resultado es **fundamental**?

El teorema de isomorfismo: Una primera versión

Dado: un vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

Teorema: Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas, entonces para cada $\mathcal{L}$ -oración φ se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

¿Cómo podemos demostrar este Teorema?

- ¿Podemos usar inducción?
- Tenemos que demostrar una versión mas *fuerte* del teorema.

El teorema de isomorfismo: Una segunda versión

Notación: Si $h : A \rightarrow B$ es una biyección que muestra que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas, entonces **h es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.**

Nota: Si σ es una asignación para $\mathfrak{A}$, entonces $h \circ \sigma$ es una asignación para B .

Teorema: Sea σ una asignación para $\mathfrak{A}$ y h un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Entonces para toda $\mathcal{L}$ -fórmula φ :

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi$$

La primera versión del teorema es un corolario de esta versión más fuerte.

El teorema de isomorfismo: Aplicaciones

Antes de demostrar el teorema de isomorfismo, vamos a ver una de sus aplicaciones.

Notación: Si $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi(x_1, \dots, x_k)$ y $\sigma(x_i) = a_i$ ($i \in [1, k]$), entonces decimos que $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)$.

El problema de **definibilidad**: Dada una estructura $\mathfrak{A}$ y $S \subseteq A^k$ ($k \geq 1$), decimos que S es definible en $\mathfrak{A}$ si existe una fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ tal que

$$S = \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)\}.$$

El problema de definibilidad: Ejemplos

¿Qué conjuntos definen las siguientes fórmulas en $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$?

$$\varphi_1(x) = \forall y(x + y = y),$$

$$\varphi_2(x) = \forall y(x \cdot y = y),$$

$$\varphi_3(x, y) = \exists z(\neg \varphi_1(z) \wedge x + z = y).$$

Para demostrar que un conjunto es definible tenemos que construir una fórmula.

¿Cómo podemos demostrar que un conjunto **no** es definible?

- ¡Podemos usar el teorema de isomorfismo!

El problema de definibilidad y el teorema de isomorfismo

¿Es la multiplicación definible en $\langle \mathbb{R}, + \rangle$?

- Si esto es cierto, entonces existe $\varphi(x, y, z)$ tal que para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbb{R}, + \rangle \models \varphi(a, b, c) \quad \text{si y sólo si} \quad a \cdot b = c.$$

- Entonces para todo isomorfismo h de $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, se tiene que:

$$\langle \mathbb{R}, + \rangle \models \varphi(a, b, c) \quad \text{si y sólo si} \quad \langle \mathbb{R}, + \rangle \models \varphi(h(a), h(b), h(c)).$$

Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{x}{2}$.

- h es un isomorfismo de $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, + \rangle$.
- $\langle \mathbb{R}, + \rangle \models \varphi(2, 2, 4)$ y $\langle \mathbb{R}, + \rangle \not\models \varphi(h(2), h(2), h(4))$. ¡Tenemos una contradicción!

El problema de definibilidad y el teorema de isomorfismo

1. Demuestre que la suma no es definible en $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.
2. Demuestre que la suma no es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$.
3. ¿Puede usarse el teorema de isomorfismo para mostrar que la multiplicación no es definible en $\langle \mathbb{N}, + \rangle$?

El teorema de isomorfismo: Demostración

Ahora vamos a demostrar **por inducción** la versión fuerte del teorema de isomorfismo.

- Dado: un vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

Necesitamos el siguiente lema:

Lema: Si σ es una asignación para $\mathfrak{A}$ y h es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, entonces $\widehat{h \circ \sigma} = h \circ \hat{\sigma}$.

Demostración: Por inducción en los $\mathcal{L}$ -términos.

- Para cada constante $c \in \mathcal{L}$: $\widehat{h \circ \sigma}(c) = c^{\mathfrak{B}} = h(c^{\mathfrak{A}}) = h(\hat{\sigma}(c)) = (h \circ \hat{\sigma})(c)$.

El teorema de isomorfismo: Demostración

- Para cada variable x : $\widehat{h \circ \sigma}(x) = (h \circ \sigma)(x) = h(\sigma(x)) = h(\hat{\sigma}(x)) = (h \circ \hat{\sigma})(x)$.
- Para cada función n -aria $f \in \mathcal{L}$: Si $\widehat{h \circ \sigma}(t_i) = (h \circ \hat{\sigma})(t_i)$ para todo $i \in [1, n]$, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{h \circ \sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) &= f^B(\widehat{h \circ \sigma}(t_1), \dots, \widehat{h \circ \sigma}(t_n)) \\ &= f^B((h \circ \hat{\sigma})(t_1), \dots, (h \circ \hat{\sigma})(t_n)) \\ &= f^B(h(\hat{\sigma}(t_1)), \dots, h(\hat{\sigma}(t_n))) \\ &= h(f^A(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n))) \\ &= h(\hat{\sigma}(f(t_1, \dots, t_n))) \\ &= (h \circ \hat{\sigma})(f(t_1, \dots, t_n)).\end{aligned}$$

El teorema de isomorfismo: Demostración

Vamos a demostrar el teorema por inducción en la estructura de φ :

- Si $\varphi = t_1 = t_2$, entonces:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A}, \sigma) \models t_1 = t_2 \\ & \text{si y sólo si} \\ & \hat{\sigma}(t_1) = \hat{\sigma}(t_2) \\ & \text{si y sólo si} \\ & h(\hat{\sigma}(t_1)) = h(\hat{\sigma}(t_2)) \\ & \text{si y sólo si} \\ & (h \circ \hat{\sigma})(t_1) = (h \circ \hat{\sigma})(t_2) \\ & \text{si y sólo si} \\ & \widehat{h \circ \sigma}(t_1) = \widehat{h \circ \sigma}(t_2) \\ & \text{si y sólo si} \\ & (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models t_1 = t_2. \end{aligned}$$

El teorema de isomorfismo: Demostración

- Si $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$, entonces:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A}, \sigma) \models R(t_1, \dots, t_n) \\ & \quad \text{si y sólo si} \\ & \quad (\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n)) \in R^A \\ & \quad \text{si y sólo si} \\ & \quad (h(\hat{\sigma}(t_1)), \dots, h(\hat{\sigma}(t_n))) \in R^B \\ & \quad \text{si y sólo si} \\ & \quad ((h \circ \hat{\sigma})(t_1), \dots, (h \circ \hat{\sigma})(t_n)) \in R^B \\ & \quad \text{si y sólo si} \\ & \quad (\widehat{h \circ \sigma}(t_1), \dots, \widehat{h \circ \sigma}(t_n)) \in R^B \\ & \quad \text{si y sólo si} \\ & \quad (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models R(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

El teorema de isomorfismo: Demostración

Finalmente suponemos que la propiedad se cumple para ψ y θ .

- Si $\varphi = \neg\psi$, entonces:

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \\ &\text{si y sólo si} \\ &(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi \\ &\text{si y sólo si} \\ &(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \not\models \psi \\ &\text{si y sólo si} \\ &(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi \end{aligned}$$

El teorema de isomorfismo: Demostración

- Si $\varphi = \psi \wedge \theta$, entonces:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \\ & \text{si y sólo si} \\ & (\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi \text{ y } (\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta \\ & \text{si y sólo si} \\ & (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \psi \text{ y } (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \theta \\ & \text{si y sólo si} \\ & (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi \end{aligned}$$

El teorema de isomorfismo: Demostración

- Asuma que $\varphi = \exists x \psi$.

Sólo vamos a demostrar una dirección. La otra dirección se demuestra de la misma forma pero considerando h^{-1} en lugar de h .

Si $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$: Existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$.

Por hipótesis de inducción: Existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{B}, h \circ \sigma[x/a]) \models \psi$.

Pero: $h \circ \sigma[x/a] = (h \circ \sigma)[x/h(a)]$.

Tenemos que: Existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{B}, (h \circ \sigma)[x/b]) \models \psi$.

Por lo tanto: $(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi$.