Resolución proposicional

Sabemos que $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

¿Cómo verificamos si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente?

- El método basado en tablas de verdad es demasiado lento.
- Necesitamos un método alternativo que no construya tablas de verdad.

Reducción a claúsulas

Notación: Una claúsula es una disjunción de literales.

Ejemplo: $p \vee \neg q \vee \neg r$.

Una fórmula φ está en CNF si es de la forma $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$, donde cada C_i es una claúsula.

Podemos representar φ como $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$. ¿Por qué?

Notación: También usamos $\equiv$ para denotar equivalencia entre conjuntos de fórmulas.

Reducción a claúsulas

Toda fórmula es equivalente a un conjunto de claúsulas.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \to r &\equiv \neg(p \vee q) \vee r \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\
&\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\
&\equiv \{\neg p \vee r,\ \neg q \vee r\}
\end{aligned}$$

Entonces: Nos basta con resolver el problema de satisfacibilidad para conjuntos de claúsulas.

La regla de resolución

¿Cómo verificamos si un conjunto de claúsulas es inconsistente?

Sabemos que Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \models \varphi$, donde φ es una contradicción cualquiera.

Entonces: Fijamos una contradicción $\square$ y lo que hacemos es verificar si $\Sigma \models \square$.

Notación: Decimos que $\square$ es la claúsula vacía porque una claúsula sin literales no es satisfacible.

La regla de resolución

Para verificar que $\Sigma \models \square$ no queremos usar valuaciones, queremos usar alguna regla sintáctica.

Notación: Si $l = p$, entonces $\bar{l} = \neg p$, y si $l = \neg p$, entonces $\bar{l} = p$.

Dado: claúsulas C_1, C_2, C_3, C_4 y literal l.

Regla de resolución:

$$\frac{\begin{array}{l} C_1 \vee l \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{l} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

La regla es correcta: $\{C_1 \vee l \vee C_2,\ C_3 \vee \bar{l} \vee C_4\} \models C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4$

La regla de resolución: Ejemplo

Ejemplo:

$$\frac{\begin{array}{c}\neg p \lor q \\ \neg q \lor r\end{array}}{\neg p \lor r}$$

Tenemos que: $\{\neg p \lor q,\ \neg q \lor r\} \models \neg p \lor r$

La regla de resolución: Casos particulares

Algunos casos particulares de la regla de resolución:

$$\frac{\begin{array}{l} C_1 \lor l \lor C_2 \\ \bar{l} \end{array}}{C_1 \lor C_2} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{l} l \\ \bar{l} \end{array}}{\square}$$

En el último caso estamos diciendo que $\{l, \bar{l}\}$ es inconsistente.

Demostraciones por resolución

Dado: Conjunto de claúsulas Σ y una claúsula C.

Una *demostración por resolución de C desde Σ* es una secuencia de claúsulas C_1, C_2, ..., C_n tal que:

- Para cada $i \leq n$:
  - $C_i \in \Sigma$ o
  - existen $j, k < i$ tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando la regla de resolución.
- $C_n = C$.

Notación: $\Sigma \vdash C$

Demostraciones por resolución: Ejemplo

Ejemplo: $\Sigma = \{p \vee q \vee r,\ \neg p \vee s,\ \neg q \vee s,\ \neg r \vee s\}$ y $C = q \vee r \vee s$.

Una demostración de C desde Σ:

(1)	$p \vee q \vee r$	pertenece a Σ.
(2)	$\neg p \vee s$	pertenece a Σ.
(3)	$q \vee r \vee s$	resolución de (1) y (2).

¿Existe otra demostración de C desde Σ?

Demostraciones por resolución: Otro Ejemplo

Otro ejemplo: $\Sigma = \{p \vee q \vee r,\ \neg p \vee s,\ \neg q \vee s,\ \neg r \vee s,\ \neg s\}$ y $C = \square$.

(1)	$p \vee q \vee r$	pertenece a Σ.
(2)	$\neg p \vee s$	pertenece a Σ.
(3)	$q \vee r \vee s$	resolución de (1) y (2).
(4)	$\neg q \vee s$	pertenece a Σ.
(5)	$r \vee s \vee s$	resolución de (3) y (4).
(6)	$\neg r \vee s$	pertenece a Σ.
(7)	$s \vee s \vee s$	resolución de (5) y (6).
(8)	$\neg s$	pertenece a Σ.
(9)	$s \vee s$	resolución de (7) y (8).
(10)	s	resolución de (8) y (9).
(11)	$\square$	resolución de (8) y (10).

La regla de factorización

Como la regla de resolución es puramente sintáctica, desde $q \vee r \vee s$ y $\neg q \vee s$ obtenemos $r \vee s \vee s$.

Dado: Claúsulas C_1, C_2, C_3 y un literal l.

Regla de factorización:

$$\frac{C_1 \vee l \vee C_2 \vee l \vee C_3}{C_1 \vee l \vee C_2 \vee C_3}$$

La regla es correcta: $\{C_1 \vee l \vee C_2 \vee l \vee C_3\} \models C_1 \vee l \vee C_2 \vee C_3$

La regla de factorización

Una demostración por resolución puede usar tanto la regla de resolución como la de factorización.

Formalmente: Una demostración por resolución de C desde Σ es una secuencia de claúsulas C_1, C_2, ..., C_n tal que:

- Para cada $i \leq n$:
  - $C_i \in \Sigma$ o
  - existe $j < i$ tal que C_i es obtenido desde C_j usando la regla de factorización o
  - existen $j, k < i$ tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando la regla de resolución.
- $C_n = C$.

Notación: Seguimos usando $\Sigma \vdash C$

La regla de factorización: Ejemplo

Ejemplo anterior: $\Sigma = \{p \vee q \vee r,\ \neg p \vee s,\ \neg q \vee s,\ \neg r \vee s,\ \neg s\}$ y $C = \square$.

(1)	$p \vee q \vee r$	pertenece a Σ.
(2)	$\neg p \vee s$	pertenece a Σ.
(3)	$q \vee r \vee s$	resolución de (1) y (2).
(4)	$\neg q \vee s$	pertenece a Σ.
(5)	$r \vee s \vee s$	resolución de (3) y (4).
(6)	$r \vee s$	factorización de (5).
(7)	$\neg r \vee s$	pertenece a Σ.
(8)	$s \vee s$	resolución de (6) y (7).
(9)	s	factorización de (8).
(10)	$\neg s$	pertenece a Σ.
(11)	$\square$	resolución de (9) y (10).

Correctitud y completidad

Podríamos agregar otras reglas a nuestro sistema de demostración. ¿Cómo sabemos si un conjunto de reglas es *bueno*?

Usamos dos criterios: Correctitud y completidad.

Correctitud: Si C se puede deducir desde Σ usando el conjunto de reglas, entonces $\Sigma \models C$.

Teorema (correctitud de resolución): Si $\Sigma \vdash C$, entonces $\Sigma \models C$.

Ejercicio: Demuestre el teorema.

Corolario: Si $\Sigma \vdash \square$, entonces Σ es inconsistente.

Correctitud y completidad

Completidad: Si $\Sigma \models C$, entonces es posible deducir C desde Σ usando el conjunto de reglas.

Ejercicio: Encuentre Σ y C tal que $\Sigma \models C$ y no es cierto que $\Sigma \vdash C$.

Tenemos que agregar otras reglas si queremos completidad.

Pero: Sólo queremos usar resolución para demostrar que un conjunto de claúsulas es inconsistente.

Forma débil de completidad: Si $\Sigma \models \square$, entonces es posible deducir $\square$ desde Σ usando el conjunto de reglas.

Correctitud y completitud

Teorema (completitud de resolución): Si $\Sigma \models \square$, entonces $\Sigma \vdash \square$.

Corolario: Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vdash \square$.

¡Podemos usar resolución para verificar si un conjunto de claúsulas es inconsistente!

Ejercicio: Demuestre el teorema de completitud (hagalo por inducción en el número de letras proposicionales mencionadas en Σ).

Resolución proposicional: Comentarios finales

- Suponga que Σ es infinito. ¿Es cierto que Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vdash \square$?

- Sean C_1, C_2, C_3, C_4 claúsulas y l_1, l_2 literales. ¿Es la siguiente regla correcta?

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee l_1 \vee l_2 \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{l_1} \vee \bar{l_2} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

- ¿Es conveniente agregar otras reglas de deducción a nuestro sistema de demostración?

Completitud: Demostración

Vamos a demostrar el teorema de completitud.

Dado: conjunto inconsistente de fórmulas Σ.

Por demostrar: $\Sigma \vdash \Box$

Vamos a hacer la demostración por inducción en el número n de letras proposicionales mencionadas en Σ.

Completitud: Demostración

Caso base: Sea $n = 0$. Entonces $\Sigma = \emptyset$, y trivialmente $\Sigma \vdash \square$.

Caso inductivo: Supongamos que la propiedad es válida para n y que Σ contiene $n + 1$ letras proposicionales.

Primero, sea l un literal mencionado en Σ. Defina $\Sigma(l) = \{C - \bar{l} \mid C \in \Sigma, l \notin C\}$.

Lema: Si Σ es inconsistente, entonces $\Sigma(l)$ es inconsistente.

Ejercicio: Demuestre el lema.

Completidad: Demostración

Entonces, existen:

- Demostración por resolución $C_1, \ldots, C_n$ de $\square$ desde $\Sigma(l)$.
- Demostración por resolución $D_1, \ldots, D_m$ de $\square$ desde $\Sigma(\bar{l})$.

Idea: Convertir a $C_1, \ldots, C_n$ en una demostración por resolución de $\bar{l}$ o $\square$ desde Σ, y a $D_1, \ldots, D_m$ en una demostración por resolución de l o $\square$ desde Σ.

En cualquier caso, hay una demostración por resolución de $\square$ desde Σ.