Auxiliar Nº2, CC30A, Primavera 2007

23 de agosto de 2007

Profesor: Benjamín Bustos, Auxiliares: Hernán Arroyo, Carlos Cabrera

1. Ecuaciones en recurrencia

Estos son algunos tipos de ecuaciones comunes:

1. $X_n = X_{n-1} + b_n$

   $X_0 = b_0$

   $X_1 = b_0 + b_1$

   $X_2 = b_0 + b_1 + b_2$

   ...

   $X_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$

2. $X_{n+1} = a_n X_n + b_{n+1}$

   $X_0 = b_0$

   $X_{n+1} = a_{n+1} X_n + b_{n+1} \quad / \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} a_k}$

   $\Rightarrow \frac{X_{n+1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n+1}} = \frac{X_n}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} + \frac{b_{n+1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n+1}}$

   redefiniendo $Y_n = \frac{X_n}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$ y $c_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n+1}}$

   $\Leftrightarrow Y_{n+1} = Y_n + c_{n+1}$

3. $X_n = d_n + X_{\frac{n}{b}}$

   utilizando el cambio de variable $n = b^k$

   $\Rightarrow X_{b^k} = d_{b^k} + X_{b^{k-1}}$

   y definiendo $Z_k = X_{b^k}$, $\tilde{d}_k = d_{b^k}$

   $\Leftrightarrow Z_k = \tilde{d}_k + Z_{k-1}$

4. $X_{n+k}a_k + X_{n+k-1}a_{k-1} + X_{n+k-2}a_{k-2} + \ldots X_n a_0 = 0$

   supongamos X_n de la forma $X_n = \lambda^n$

   $\Rightarrow \lambda^{n+k}a_k + \lambda^{n+k-1}a_{k-1} + \lambda^{n+k-2}a_{k-2} + \ldots + \lambda^n a_0 = 0$

   factorizando,

   $\Leftrightarrow \lambda^n(\lambda^k a_k + \lambda^{k-1}a_{k-1} + \lambda^{k-2}a_{k-2} + \ldots + a_0) = 0$

   $\Rightarrow \lambda^k a_k + \lambda^{k-1}a_{k-1} + \lambda^{k-2}a_{k-2} + \ldots + a_0 = 0$

   que es un polinomio para λ al que le podemos encontrar sus raices $\lambda_1 ... \lambda_p$, resultando:
   $X_n = C_1\lambda_1 + ... + C_p\lambda_p$
   donde las constantes se pueden obtener imponiendo las condiciones iniciales

1.1. Ejercicios

resolver las siguientes ecuaciones:

1. $X_{n+1} = X_n + log_2(n+1)$, $X_0 = 0$
2. $X_{n+1} = 2X_n + 1$, $X_0 = 0$
3. $X_{n+1} = \sqrt{X_n X_{n-1}}$, $X_0 = 1$,$X_1 = 2$
4. $X_n = pX_{\frac{n}{q}} + Kn$, $X_1 = 0$, para los casos $p < q$, $p > q$, $p = q$