Ejercicio 2, auxiliar 2, Algoritmos y estructuras de datos.

Resolver:

$X_{n+1} = 2X_n + 1, X_0 = 0$

Multipliquemos por $\frac{1}{2^{n+1}}$:

$\frac{X_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{X_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$

sea $Y_n = \frac{X_n}{2^n}$; la condición inicial queda como $Y_0 = 0$, y la recurrencia:

$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2^{n+1}}$

desenrollemos la ecuación para ver la forma que tiene:

$Y_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + Y_n$

$Y_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + Y_{n-1}$

$Y_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + Y_{n-2}$

$\vdots$

$Y_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + Y_0$

$Y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} = -1 + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{2^i} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+2}}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1 - (\frac{1}{2})^{n+1}$

asi, tenemos que $X_n$es:

$X_n = 2^n Y_n = 2^n - 1.$