

Clase Auxiliar 4

1.- Descripción Formal de un Modelo

Un modelo se puede describir formalmente como un autómata finito descrito por la cuádrupla:

$(\text{ESTADOS}, \text{SALIDAS}, \delta, \lambda)$

donde:

$\text{ESTADOS} = \{(e_1, \dots, e_n) \in \text{ESTADO}_1 \times \dots \times \text{ESTADO}_n \mid (e_1, \dots, e_n) \text{ es un estado del sistema}\}$, donde ESTADO_i es el rango de la variable de estado i .

$\text{SALIDAS} = \{(s_1, \dots, s_n) \in \text{SALIDA}_1 \times \dots \times \text{SALIDA}_n \mid (s_1, \dots, s_n) \text{ es la salida en un instante dado}\}$, donde SALIDA_i es el rango de la variable de salida i .

$\delta: \text{ESTADOS} \rightarrow \text{ESTADOS}$; es la *función de transición de estados*

$\lambda: \text{ESTADOS} \rightarrow \text{SALIDAS}$; es la *función de salida*

Esto es en el caso de los modelos (de tiempo discreto) autónomos. Si el modelo es no-autónomo, entonces el autómata queda descrito por la quintupla:

$(\text{ENTRADAS}, \text{ESTADOS}, \text{SALIDAS}, \delta, \lambda)$

donde ESTADOS y SALIDAS se definen igual que arriba y:

$\text{ENTRADAS} = \text{ENTRADA}_1 \times \dots \times \text{ENTRADA}_n$, donde ENTRADA_i es el rango de la variable de entrada i .

$\delta: \text{ESTADOS} \times \text{ENTRADAS} \rightarrow \text{ESTADOS}$; es la *función de transición de estados*

$\lambda: \text{ESTADOS} \times \text{ENTRADAS} \rightarrow \text{SALIDAS}$; es la *función de salida*

Es importante notar que ENTRADAS se define como el producto cruz de todos los rangos de entrada, mientras que ESTADOS y SALIDAS son sólo subconjuntos de los productos cruces de los rangos de entrada y salida, respectivamente. ¿Por qué? Porque hay estados y salidas que son imposibles.

Ejemplo: un semáforo, con variables de estado LUZ_ROJA , con rango $\{\text{ON}, \text{OFF}\}$ y LUZ_VERDE con el mismo rango.

$\text{LUZ_ROJA} \times \text{LUZ_VERDE} = \{(\text{ON}, \text{OFF}), (\text{OFF}, \text{ON}), (\text{OFF}, \text{OFF}), (\text{ON}, \text{ON})\}$

Sin embargo, $\text{ESTADOS} = \{(\text{ON}, \text{OFF}), (\text{OFF}, \text{ON})\} \subseteq \text{LUZ_ROJA} \times \text{LUZ_VERDE}$, ya que nunca estarán apagadas ambas luces al mismo tiempo o prendidas al mismo tiempo.

Función de Transición (δ)

Esta función, a partir de las entradas y estados en el instante de tiempo t , nos da los estados en el siguiente instante de tiempo, t' . Se puede representar como diagrama o tabla, de manera equivalente. O sea que es posible pasar de una forma de representación a la otra.

Función de Salida (λ)

Esta función, a partir de las entradas y estados en el instante de tiempo $\mathbf{t}$, nos entrega las variables de salida del mismo instante $\mathbf{t}$.

Nota:

Las variables de salida se pueden elegir arbitrariamente entre todas las variables descriptivas. O sea que una variable de estado también puede ser de salida, así como una variable descriptiva puede que no pertenezca a la salida.

Problemas

Problema #1

En la ciudad de Praga, el reloj de Ayuntamiento, construido en los siglos XV y XVI, funciona entre las 9:30 y las 17:30 en la secuencia que se indica a continuación.

Tres minutos antes de una hora (es decir, 9:57; 10:57; etc.), la figura de La Muerte (un esqueleto) tira de una cuerda que lleva en la mano derecha. Dos minutos antes de la hora, desfilan arriba del reloj las figuras de los Doce Apóstoles. Un minuto antes de la hora, un gallo canta, y a la hora exacta, el reloj mismo marca la hora. Un minuto después de la hora, se mueven simultáneamente las figuras de El Turco, La Vanidad y La Avaricia. Cada una de estas actividades suponga que duran (cada una de ellas) exactamente un minuto. El resto del tiempo, los diversos componentes están quietos.

Especifique las variables de estado para el sistema descrito por el funcionamiento de este singular reloj.

Problema #2

Suponga que existe el siguiente dispositivo de conteo de votos denominado Votómetro. Consiste en una matriz de 9×9 células fotoeléctricas que detectan si en un sector hay luz o no hay luz, y envía respectivamente un 1 ó un 0 a la componente K. La componente K pondera la cifra que recibe cada célula con un “peso” y en seguida, suma los valores obtenidos. Si la suma ponderada es mayor que 40, el dispositivo entrega un 1 (“sí”), mientras que si es menor o igual, entrega un 0 (“no”). Los pesos son 4 para todas las células que están en la columna central (Nº 5) y/o en la fila central (Nº 5), y son -1 para las otras.

La lectura de las células es instantánea y su transmisión a K también.. K demora una unidad de tiempo en generar su respuesta.

Usted debe hacer la descripción formal del modelo descrito anteriormente.

Problema #3

En la ciudad de Pelotillehue, el Departamento de Tránsito se encuentra preocupado por la serie de accidentes que se producen en las calles de la ciudad. Es por ello que ha diseñado un nuevo sistema que permitirá controlar y castigar a los conductores que cometen infracciones en forma reiterada.

Para ello:

- Si un conductor comete una infracción se le suman puntos negativos a su historial de acuerdo a la gravedad de la infracción: 1 punto si es leve, 5 si es grave y 3 en el resto de los casos.
- Si un conductor acumula más de 10 puntos negativos al final del año, entonces no se le renueva la licencia de conducir durante 1 año (la renovación se efectúa al final de cada año).
- Si un conductor no acumula puntos negativos en un año, entonces se le borran los puntos acumulados hasta el momento.
- Si un conductor no acumula puntos negativos en dos años consecutivos, entonces se incrementa su límite de infracciones en un 20% para los siguientes años.
- Si a un conductor le han negado la renovación de su licencia de conducir en más de 3 ocasiones (por sumar muchos puntos negativos), entonces no se le permite conducir de por vida.

Haga el la descripción formal del modelo del nuevo sistema para el Departamento de Tránsito de Pelotillehue. Considere variable a observar la renovación (o no) de la licencia.

Solución de los Problemas

Problema #1

Tenemos las siguientes variables descriptivas para la componente del sistema (RELOJ_AYUNTAMIENTO):

HORA – con rango $\{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 23\}$ (también se puede modelar con un reloj de 12 horas)

MINUTOS – con rango $\{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 59\}$

MUERTE, APOSTOLES, GALLO, TURCO, AVARICIA, VANIDAD $\in \{\text{MUEVE, QUIETO}\}$
(recuerden que las figuras del turco, la avaricia y la vanidad también se pueden modelar como una sola componente.)

RELOJ $\in \{\text{MARCA, QUIETO}\}$

Interacciones:

Propuesto.

Entradas:

El sistema es autónomo.

Candidatos a Variable de Estado:

Previamente: estableceremos nuestra unidad de tiempo en minutos, ya que no nos interesa que ocurra con los segundos en este modelo, por ende $t_{i+1} - t_i = 1$ minuto.

Sigamos: Como para conocer el valor de todas las variables descriptivas es necesario saber el valor de HORA y MINUTOS, estos serían nuestros candidatos. Ahora, verifiquemos si lo son:

$$\begin{aligned} & \text{HORA}(t) \text{ si } \text{MINUTOS}(t) < 59 \\ \text{HORA}(t+1) = & \text{HORA}(t)+1 \text{ si } \text{MINUTOS}(t) = 59 \text{ y } \text{HORA}(t) < 23 \\ & 0, \text{ si } \text{HORA}(t) = 23 \text{ y } \text{MINUTOS}(t) = 59 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ HORA(t+1) se puede calcular a partir de los valores de MINUTOS(t) y HORA(t)

$$\begin{aligned} \text{MINUTOS}(t+1) = & \text{MINUTOS}(t) + 1 \text{ si } \text{MINUTOS}(t) < 59 \\ & 0, \text{ si } \text{MINUTOS}(t) = 59 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ MINUTOS(t+1) se puede calcular a partir del valor de MINUTOS(t)

Verifiquemos ahora si es posible calcular los valores del resto de las variables en un tiempo t a partir de los valores de HORA(t) y MINUTOS(t)

MUERTE(t) = MUEVE, si $9 \leq \text{HORA}(t) \leq 16$ y $\text{MINUTOS}(t) = 57$
QUIETO, si no

APOSTOLES(t) = MUEVE, si $9 \leq \text{HORA}(t) \leq 16$ y $\text{MINUTOS}(t) = 58$
QUIETO, si no

GALLO(t) = MUEVE, si $9 \leq \text{HORA}(t) \leq 16$ y $\text{MINUTOS}(t) = 59$
QUIETO, si no

RELOJ(t) = MARCA, si $10 \leq \text{HORA}(t) \leq 17$ y $\text{MINUTOS}(t) = 0$
QUIETO, si no

(TURCO, VANIDAD, AVARICIA)(t) = (MUEVE, MUEVE, MUEVE) si $10 \leq \text{HORA}(t) \leq 17$ y
 $\text{MINUTOS}(t) = 1$
(QUIETO, QUIETO, QUIETO) si no

=> Es posible calcular el valor de todas las variables a partir de HORA y MINUTOS en t.
Por lo tanto, se muestra que HORA y MINUTOS son variables de estado para el modelo estudiado.

Problema #2

La descripción forma es la quintupla (ENTRADAS, ESTADOS, SALIDAS, δ , λ) donde:

ENTRADAS: $C = \{0,1\}^{81}$

(que interpretamos como una matriz tal que $C_{ij} = 1$ si hay luz o $C_{ij} = 0$ si no hay luz).

ESTADOS: $d = \{0,1\}$

(Corresponde a la decisión tomada por K)

SALIDAS: $d = \{0,1\}$

δ : ENTRADAS x ESTADOS $\rightarrow$ ESTADOS

$$\delta(C, d) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_i \sum_j C_{ij} * W_{ij} \geq 40 \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{donde } W_{ij} = \begin{cases} 4 & \text{si } i=5 \text{ o } j=5 \\ -1 & \text{si no} \end{cases}$$

λ : ENTRADAS x ESTADOS $\rightarrow$ SALIDAS

$\lambda(C,d) = d$

Problema #3

-Componentes:

CONDUCTOR_i con i

Variables Descriptivas:

CONDUCTOR_i:

PUNTOS_ACUMULADOS_i: con rango $\{x / x \in \mathbb{N}\}$

LIMITE_i: con rango $\{x \in \mathbb{N} / x \geq 10\}$

RENUEVA_i: con rango $\{SI, NO\}$

CASTIGADO_i: con rango $\{x / x \in \mathbb{N}\}$

-Variables de Entrada: INFRACCION_{i,j} = $\{1,3,5\}$ con $i,j \in \mathbb{N}$ (que corresponde a la infracción j del CONDUCTOR_i) $\Rightarrow$ ENTRADAS = $\{1,3,5\}^j$

-Variables de Estado: $\{PUNTOS_ACUMULADOS_i, LIMITE_i, CASTIGADO_i\}$

$\Rightarrow$ ESTADOS $\subseteq \{x / x \in \mathbb{N}\} \times \{x \in \mathbb{N} / x \geq 10\} \times CASTIGADO_i$

Variables de Salida: $\{RENUEVA_i\} \Rightarrow SALIDAS = \{SI, NO\}$

δ : ENTRADAS x ESTADOS $\rightarrow$ ESTADOS

**(PUNTOS_ACUMULADOS_i', (0, LIMITE_i, CASTIGADO_i) si $\sum_j INFRACCION_{i,j}=0$
LIMITE_i', CASTIGADO_i') = (PUNTOS_ACUMULADOS_i + $\sum_j INFRACCION_{i,j}$,
LIMITE_i*1.2, CASTIGADO_i) si $\sum_j INFRACCION_{i,j}=0$
y PUNTOS_ACUMULADOS_i=0
(PUNTOS_ACUMULADOS_i + $\sum_j INFRACCION_{i,j}$,
LIMITE_i, CASTIGADO_i + 1) si
PUNTOS_ACUMULADOS_i + $\sum_j INFRACCION_{i,j} >$
LIMITE_i
(LIMITE_i+1, LIMITE_i, CASTIGADO_i) Si
CASTIGADO_i > 3
(PUNTOS_ACUMULADOS_i + $\sum_j INFRACCION_{i,j}$,
LIMITE_i, CASTIGADO_i) en el resto de los casos.**

λ : ENTRADAS x ESTADOS $\rightarrow$ SALIDAS

(RENUOVA_i) = **(NO)** si $\sum_j \text{INFRACCION}_{i_j} + \text{PUNTOS_ACUMULADOS}_i > \text{LIMITE}_i$
(SI) si $\sum_j \text{INFRACCION}_{i_j} = 0$ (si no, no funciona bien cuando está suspendido)
(SI) en el resto de los casos

Y así definimos la quintupla (ENTRADAS, ESTADOS, SALIDAS, δ , λ).