AS31B: Astrofísica de $\star$s - Tarea 2

Inicio: Miércoles 29 de Agosto
Entrega: Jueves 13 de Septiembre, en clase auxiliar (control 1)

1. Radiación.

   (a) Una de las definiciones de Cuerpo Negro (Black Body, BB) dice que es un objeto que absorve toda la radiación incidente sobre él (es decir que no refleja nada). A partir de la definición de BB vista en clase, **argumente** que esto debe ser así.

   (b) Ley de desplazamiento de Wien.

   i. A partir de la función de Planck, $B_\lambda(T)$, demuestre que la longitud de onda en su máximo está dada por (**Ley de Wien**):

   $$\lambda_{max} T = Constante_1 \tag{1}$$

   y calcule la constante en unidades de [cm K].

   ii. Demuestre que la expresión anterior se puede escribir como:

   $$\lambda_{max} T = (5000\mathring{A}) \times (5800K) \tag{2}$$

   iii. Para la $T_{e_\odot}$ calculada en clases, obtenga $\lambda_{max_\odot}$. A qué 'color' del espectro electro-magnético corresponde esta longitud de onda?

   iv. A partir de la función de Planck $B_\nu(T)$, demuestre que la frequencia en su máximo está dada por (**otra forma de la Ley de Wien**):

   $$\frac{T}{\nu_{max}} = Constante_2 \tag{3}$$

   y calcule la constante en unidades de [Hz^{-1} K].

   v. Demuestre que los máximos de $B_\lambda(T)$ y de $B_\nu(T)$ **no** ocurren en el mismo lugar en longitud de onda y frecuencia, es decir que $\lambda_{max} \times \nu_{max} \neq c$. Explique el orígen de este resultado.

   (c) Ley de Stefan-Boltzmann.

   i. Considere una esfera de radio R a una distancia r de un observador, y que emite de manera uniforme e isotrópica en toda su superficie. Demuestre que si B es la intensidad específica integrada sobre todas las longitudes de onda, el flujo radiante en la posición del observador, F, está dado por:

   $$F = \pi B \left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{4}$$

ii. Demuestre que para la Función de Planck se tiene que:

$$B = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} B_\lambda(T) d\lambda = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2h^3} T^4 \tag{5}$$

iii. De acuerdo con los resultados anteriores, demuestre que el flujo sobre la superficie de la esfera ($r = R$) asumida como BB cumple con:

$$F = \sigma T^4 \tag{6}$$

Exprese σ en función de constantes fundamentales, y calcule su valor en el sistema cgs. **Esta es la ecuación de Stefan-Boltzmann, y su constante σ.**

iv. Argumente que tanto la Ley de Wien (Problema 1(b)) como la ecuación de Stefan-Boltzmann (este problema) son compatibles con la definición de BB dada en el Problema 1(a).

2. Escala de magnitudes. En clases derivamos el factor de proporcionalidad que relaciona magnitudes aparentes con brillo (o flujo radiante), pero no mencionamos la constante aditiva. Muestre que si m_a y m_b son las magnitude aparentes de dos estrellas a y b, con flujos detectados F_a y F_b respectivamente, entonces:

$$m_b = m_a - 2.5 \log F_b + 2.5 \log F_a \tag{7}$$

Como puede verse de esto, si conociésemos el flujo de una estrella ('a') cualquiera, y su magnitud aparente (m_a), entonces la magnitud de cualquier otra esterlla ('b') estaría determinada con sólo medir su flujo (F_b), y el sistema de magnitudes estaría completamente especificado.

(a) La constante del sistema de magnitudes está **arbitrariamente** determinada por la estrella Vega (α Lyrae, tipo espectral A0V), la que entonces define el 'punto zero' de la escala de magnitudes: Por definición, Vega tiene una magnitud aparente m_a igual a zero en cualquier banda óptica. Obviamente, Vega no tiene el mismo brillo (flujo) en todas las bandas (esta es una propiedad física de Vega - y su distancia a nosotros!). Determine a través de que filtros Vega se vé más brillante en el sistema UBV:

$$m_\lambda^{Vega} = 2.5 \log \int_0^\infty F_\lambda^{Vega} S_\lambda \, d\lambda \tag{8}$$

Suponga a Vega un BB de $T_e^{Vega} = 9.500$ K. Haga el cálculo para $\lambda = UBV$, suponiendo que la sensibilidad de los filtros (S_λ) es 1 dentro de la ventana de los filtros, y 0 fuera de ellas, dentro de las longitudes de onda y anchos definidos en clases para estos filtros, y que el BB es $\sim$constante dentro del ancho de banda de los filtros.

(b) Los valores 'medidos' (es decir usando los filtros UBV reales, y la estrella Vega real [no un BB]), dan para $\frac{m^{Vega}}{2.5}$: (-4.37, -4.18,-4.42) con F_λ^{Vega} en [erg cm^{-2} s^{-1} μm^{-1}], donde $1\mu m = 10^{-6}$m. Compare estos valores con los obtendidos en b). ¿Porqué podrían ser discrepantes?

(c) Usando lo anterior, demuestre que para BB con $T < 10.000$ K (aproximación para estrellas de secuencia principal más tardía que A0 [e.g., Vega]), el índice de color B-V se puede escribir como:

$$B - V = a + \frac{b}{T} \tag{9}$$

donde a y b son constantes que Ud. debe determinar (recuerde que, por definición, Vega tiene un color B-V de zero!).

3. Aspectos de las leyes de Boltzmann & Saha.

(a) Partiendo de la ecuación de Boltzmann para un átomo en un estado de ionización dado, y de la definición de función de partición vista en clases, demuestre que:

$$\frac{n_i}{n} = \frac{g_i}{Z} \exp^{-E_i/kT_{ex}} \tag{10}$$

done T_{ex} es la temperatura de excitación del gas, n_i es la densidad de partículas con sus electrones en el nivel de excitación i, n es la densidad total de partículas en ese mismo estado de ionización, y E_i se mide c/r al nivel fundamental.

(b) Partiendo de lo anterior, demuestre la 'expresión logarítmica' de la ecuación de Boltzmann:

$$\log \frac{n_i}{n} = \log \frac{g_i}{Z} - \frac{5040}{T_{ex}} E_i \tag{11}$$

donde E_i está en eV y T_{ex} en K. Esto muestra claramente que para $T_{ex} \rightarrow 0$, entones $n_i \rightarrow 0$ para todo $i \neq 1$, es decir todos los átomes y iones están en el nivel fundamental.

(c) Partiendo de la expresión vista en clases para el ecuación de Saha, demuestre que su 'expresión logarítmica' está dada por:

$$\log \frac{n_{j+1}}{n_j} = \log \frac{2Z_{j+1}}{Z_j} + \frac{5}{2} \log T - \log P_e - \frac{5040}{T_{ion}} \chi_i - 0.48 \tag{12}$$

(d) Diferenciando la expresión aterior, demuestre que la razón $\delta(n_{j+1}/n_j)/(n_{j+1}/n_j)$ indica que:

- Cuando P_e aumenta, disminuye la ionización,
- Cuando T_{ex} aumenta, aumenta la ionización,
- El efecto de una pequeña variación en T es mayor que el efecto de una pequeña variación de P_e,
- El aumento de ionización al variar T_{ion} depende de T_{ion} y de χ_i, pero es mayor a menores temperaturas.

(e) Muestre que la función de partición, Z, definida en clases, y que involucra una sumatoria sobre todos los niveles de energía es en general, divergente para el átomo de H neutro.

(f) En general, si la distancia media entre dos átomos es menor que el radio orbital, no pueden haber estados ligados en ésa órbita. Con esto, y por lo visto en e), la sumatoria de la función de partición se detiene en aquel valor de n en el cual el orbital está tan lejos del núcleo ($r_n = a_o n^2/Z$, donde a_o es el radio de Bohr, y Z es el número atómico, **NO es la función de partición definida arriba**) que comienza a "colisionar" con otros átomos. Demuestre que el valor de corte de n está dado por:

$$n_{max} = \sqrt{\frac{Z}{2}\frac{< d >}{a_o}} \tag{13}$$

donde $< d >= (3/4\pi N)^{1/3}$ es la distancia promedio entre átomos con densidad numérica N.

(g) Calcule $< d >$ y n_{max} para el H (número atómico = 1) para $N_H = 1.5 \times 10^{17}$ cm^{-3} (como en la atmósfera solar, ver apuntes de clases),

(h) Haga lo mismo que en g) para el centro del Sol, donde $N_H \sim 10^{26}$ cm^{-3}. ¿Qué ocurre en éste caso?

4. Mas diagrama H-R.

   (a) A partir de las Tablas del Apéndice E del texto, haga una tabla resúmen con los rangos de T_e, $L/L_\odot$, $R/R_\odot$ y $M/M_\odot$ para estrellas de clase de luminosidad Iab (supergigantes), III (gigantes) y V (secuencia principal),

   (b) Para estrellas de secuencia principal, haga un gráfico de $\log(L/L_\odot)$ (eje Y, ordenada, con la mayor luminosidad hacia arriba) *vs.* $\log T_{eff}$ (eje X, abcisa, con la menor temperatura hacia la derecha), e incluya en cada punto del gráfico el valor de la masa de la estrella correspondiente, en términos de $M/M_\odot$,

   (c) Para estrellas de secuencia principal, haga un gráfico de $\log(L/L_\odot)$ (eje Y, ordenada) *vs.* $\log(M/M_\odot)$ (eje X, abcisa), y demuestre que existe una relación **Masa-Luminosidad** bien definida para estos objetos. En este mismo gráfico, incluya la relación entre $\log(R/R_\odot)$ y $\log(M/M_\odot)$.

5. Diagrama H-R.

(a) Desde mi sitio ftp bajar el archivo rapidas.dat (archivo de texto simple) con las estrellas de más alto movimiento propio conocidas. Usando los datos aportados por Simbad (http://simbad.u-strasbg.fr/sim-fid.pl), dibuje un diagrama H-R (e.g., M_V vs. $(B\text{-}V)_0$) para todas ellas (**use escalas y orientaciones como se usan en astronomía!**, ver cualquier texto). Señale si éste se parece o no a un diagrama H-R típico (e.g., de la vecindad solar) con estrellas en la secuencia principal (ver cualquier texto, o el problema anterior).

(b) Calcule, en base a sus distancias (o paralajes, Simbad) y movimiento propios, las velocidades tangenciales (km s^{-1}) de estas estrellas "rápidas". Calcule sus velocidades espaciales totales (usando las $V_{\rm rad}$ de Simbad, cuando estén disponibles). **Presente sus datos en forma tabular**.

(c) Las estrellas de secuencia principal de la vecindad solar tienen una dispersión de velocidades típicas de 30 km s^{-1}. ¿Se parece éste número a los valores de la velocidad total encontrada en (b)? Especule (fundamentando) si podría haber una relación entre lo encontrado en (a) y en (b).

6. Leyes de Boltzmann & Saha.

(a) Para el átomo de H, calcule la temperatura a la cual el 50% de los átomos están ionizados,

(b) Repita a) para 1% y 99%. Calcule entonces el rango de temperaturas en el cual el H se ioniza entre un 1% y un 99% en un gas en equilibrio termodinámico,

(c) Comparar los valores de b) con las temperaturas para la cuales entre un 1% y un 99% de los átomos de H neutro tiene sus electrones en el nivel excitado n=2, que dan orígen a las líneas de Balmer (visto en Clases).

(d) Usando los valores vistos en clases, calcule la razón del número de átomos de Ca doblemente ionizado (CaIII) al del Calcio ionizado una vez (CaII) para una atmósfera como la del Sol. Utilize $\chi_{II} = 11.9$ ev y $Z_{III} = 1$. ¿Es este resultado consistente con lo que se dijo en clases, de que prácticamente todos los átomos de Calcio están disponibles para originar las líneas H y K en el espectro de Fraunhoffer?

(e) Considere una atmósfera estelar de **Hidrógeno puro**. Suponiendo que las partículas de la atmósfera se comportan como un **gas ideal**, demuestre que, en equilibrio termodinámico, la dependencia en temperatura de la presión de los electrones libres (producto de la ionización parcial del Hidrógeno a temperatura T) está dada por:

$$P_{\text{electrones}} = \Phi(T)\, k\, T \left(\sqrt{1 + \frac{P_{\text{gas}}}{\Phi(T)\, k\, T}} - 1 \right) \tag{14}$$

donde P_e es la presión de los electrones libres, P_{gas} es la presión total del gas, T es la temperatura del gas, $\Phi(T)$ es una función que depende de T y k es la constante de Boltzmann de los gases ideales.

Para esto, tome en cuenta que:

$$P_{\text{gas}} = P_{\text{átomos}} + P_{\text{iones}} + P_{\text{electrones}} \tag{15}$$

Dirija sus comentarios o dudas a Alejandra Molina
(e-mail: amolina@ing.uchile.cl, tel. 977 1090)