# TRANSFERENCIA DE CALOR

MI31A-Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva

Prof. Tanai Marín

3 Abril 2007

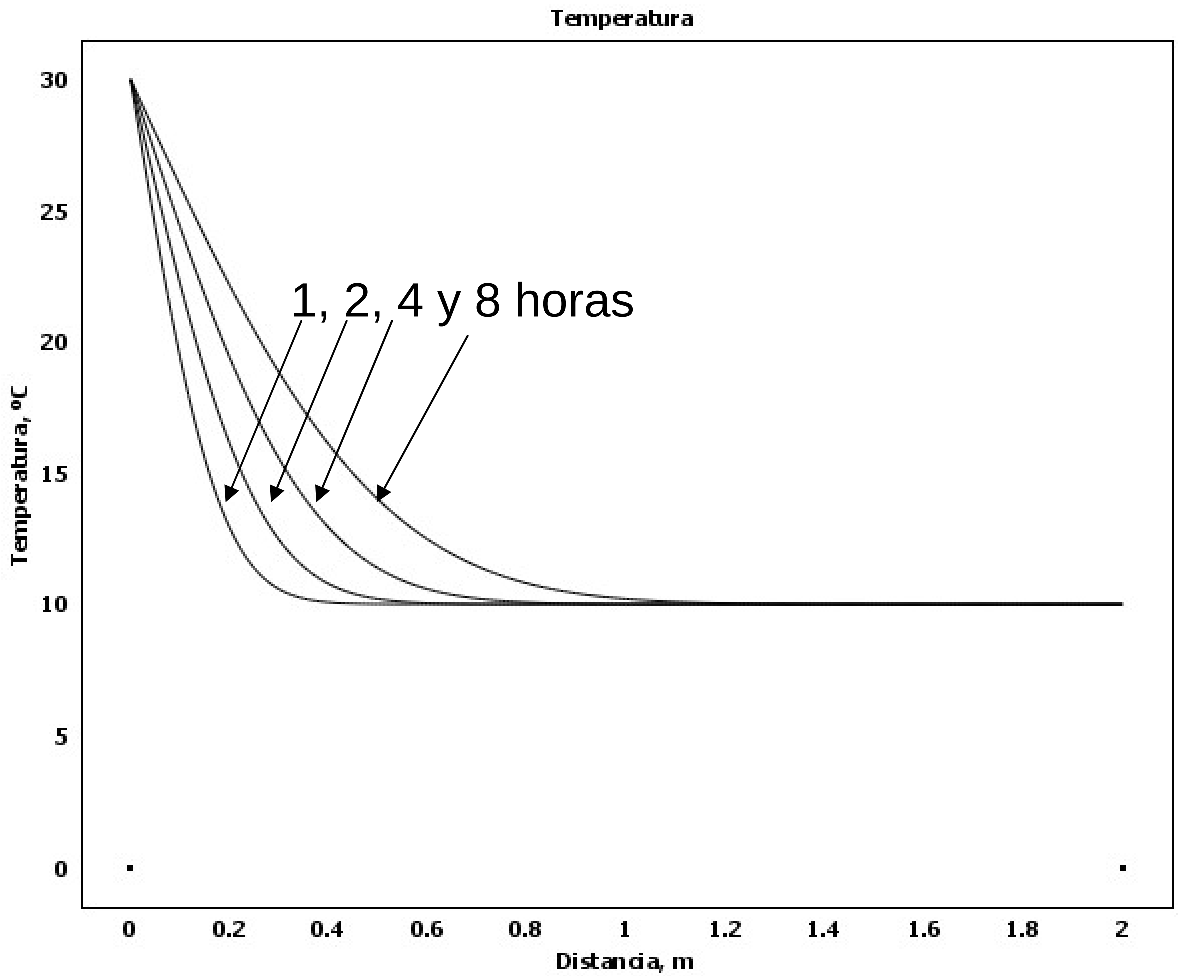
Clase #7

# Modelo de sólido semi infinito

- Este modelo sólo asume que el fenómeno de transferencia sólo ocurre cerca de la superficie y no penetra a todo el sistema.
- Esto ocurre cuando el proceso ocurre en un tiempo reducido o el sistema es muy “grande”.
- En este caso podemos asumir que la temperatura lejos de la superficie se mantiene constante e igual a la temperatura inicial.
- De algún modo, este modelo es el opuesto a método de “lump capacitance”

# ejemplo

- Supongamos una roca expuesta al sol luego de una noche fría. No importan las dimensiones de la roca ya que durante el día, sólo la superficie se calentará.



# Aplicabilidad del Modelo Semi Infinito

- Al usar el modelo semi-infinito asumimos que sólo una parte del sistema ha sido afectada por el cambio en la superficie.
- En tanto el número de Fourier sea mucho menor que 1, el proceso de transferencia de calor ha recién comenzado y no ha alcanzado el otro extremo del sistema
- Veamos el siguiente ejemplo para determinar cuándo este método es aplicable

# Ejemplo, calentamiento de un horno

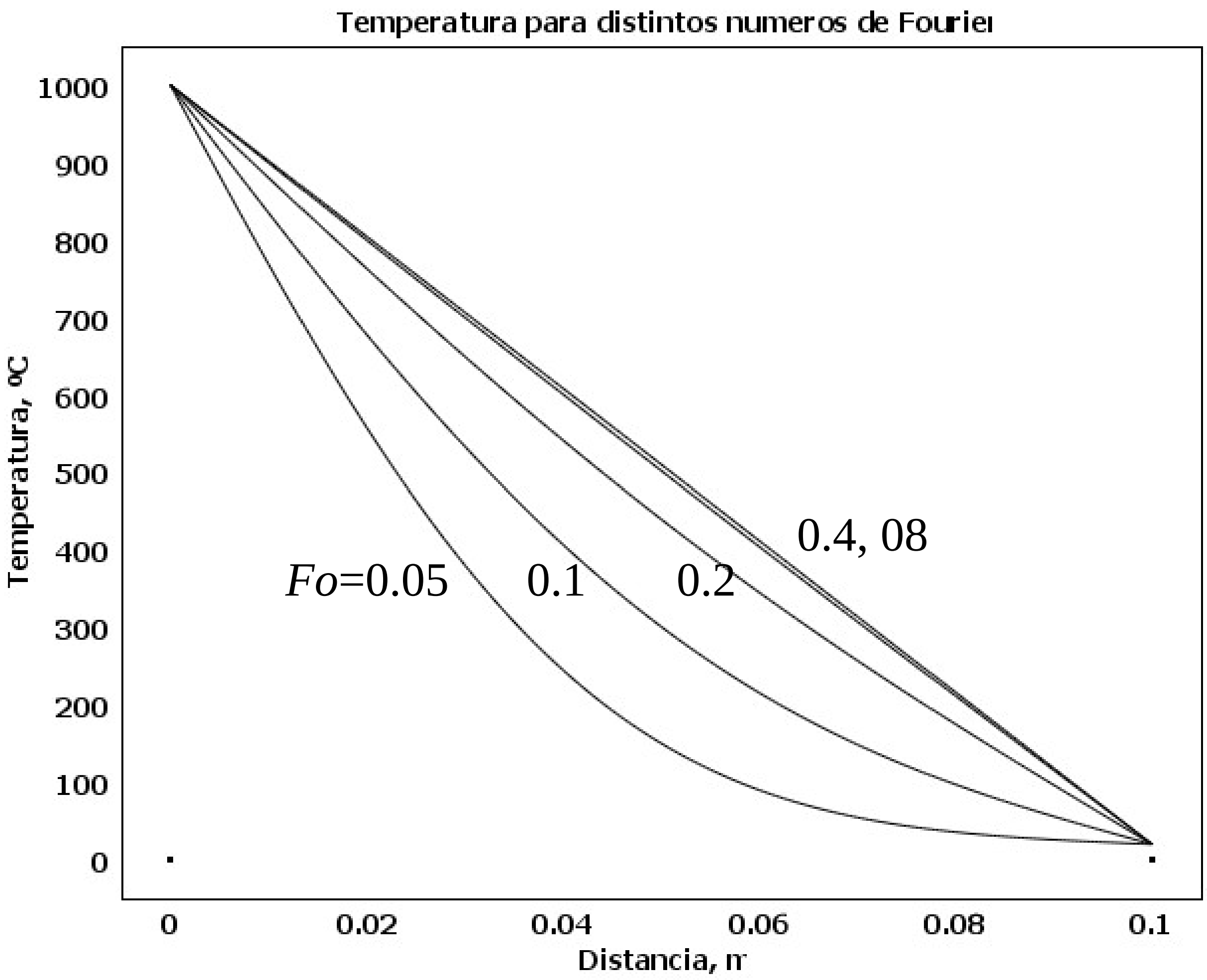
- Al encender un horno, que inicialmente se encuentra a la temperatura del ambiente, 20 [ºC].
- Las murallas del horno están hechas de 10 cm de aislación con las siguientes propiedades ($k$=0.12 W/(m K), $c_p$=1300 J/(kg K), $\rho$=600 kg/m$^3$, $\alpha$=1.54x10$^{-7}$ m$^2$/s).
- Durante el proceso se desea saber:
  - por cuanto tiempo se puede tratar a las murallas como sólido semi infinito y
  - Cuánto tiempo tardará en llegar a régimen estacionario

# Ejemplo, calentamiento de un horno

- Supongamos que las condiciones de borde son las siguientes: La temperatura de la cara interna del horno se mantiene a 1000 ºC desde el inicio del proceso y la temperatura de la cara externa se mantiene a 20 ºC.
- El perfil de temperatura calculado en función de $Fo$ es el siguiente

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} = 1.54 \cdot 10^{-5} \cdot t(s) = 0.0554 \cdot t(hr)$$

# Ejemplo, calentamiento de un horno



# Aplicabilidad del Modelo Semi Infinito

- Del ejemplo anterior, vemos que el modelo es aplicable para pequeños números de Fourier.
- Si consideramos un error en las aproximaciones de un 5% o menos, entonces este método puede aplicarse para:

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} \leq 0.1$$

# Aplicabilidad del Modelo Semi Infinito

- El número de Fourier también puede usarse para estimar cuánto calor ha sido transferido basado en qué tan profundo en el sólido la temperatura ha sido afectada.
- Para una posición $x$, cuando el número de Fourier local ha alcanzado 0.1, un cambio pequeño, pero medible (5%), de temperatura ha ocurrido. Por lo tanto el tiempo transcurrido está dado por:

$$t = \frac{0.1 \cdot x^2}{\alpha}$$

- Por ejemplo, para un ladrillo de 0.15 m con una difusividad térmica de $10^{-6}$ [$m^2/s$], el tiempo requerido para que la temperatura comience a aumentar en el otro extremo puede estimarse según:

$$t = \frac{0.1 \cdot 0.15^2 \mathrm{m}^2}{10^{-6} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = 2250\mathrm{s} \approx 38\mathrm{min}$$

- Alternativamente, para un período de tiempo dado, podemo determinar qué tan lejos el proceso de calentamiento ha llegado.

$$x = \sqrt{10 \cdot t \cdot \alpha}$$

# Ejemplo

- En una fundición, una olla inicialmente a 25 ºC se llena con cobre líquido a 1150 ºC. La olla se transporta a un horno de refinación donde ésta se vacía. El proceso toma 15 minutos. Estimar, qué tan profundo en el ladrillo refractario de la olla el frente de temperatura se ha movido.
- Datos, $k$= 1.0 [W/(m K)], $\rho$=2000 [kg/m$^3$] y $c_p$=960 [J/(kgºC)].

# Perfil de Temperatura según Modelo Semi Infinito

- Debemos resolver la ecuación que representa el balance de calor en modo transiente. En 1D y coord. cartesianas:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2}$$

- Para resolverla, necesitamos 2 condiciones de borde y una condición inicial. En este modelo asumimos que la temperatura en un extremop permanece constante. En la superficie donde ocurre el cambio, podemos imponer distintas condiciones de borde.

# Temperatura constante en la superficie

- En tanto el sólido pueda ser tratado como sólido semi infinito con una temperatura inicial $T_0$, la temperatura dentro del sólido será:

$$T(x,t) = T_S + (T_0 - T_S)\cdot erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

- donde $T_S$ es la temperatura impuesta en la superficie y $T(x,t)$ es la temperatura a una distancia $x$ de la superficie

- La ecuación anterior puede reordenarse para calcular la temperatura adimensional:

$$\theta = \frac{T(x,t) - T_S}{T_0 - T_S} = erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) = erf\left(\frac{1}{2\sqrt{Fo(x)}}\right)$$

- *erf* se define como la "función de error":

$$erf(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^u e^{-u^2}\,du$$

- *erf(u)* varía de 0 a 1 mientras *u* varía entre 0 e ∞. El factor $2/\pi^{1/2}$ normaliza la función.

- Para pequeños valores de u (u<=0.2) erf se puede aproximar como:

$$erf(u) = \frac{2u}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha \cdot t}}\right) \approx \frac{x}{\sqrt{\pi\alpha \cdot t}}$$

- Cerca de la superficie, donde esta condición es válida (x muy pequeño), el flujo de calor se puede calcular:

$$q(0,t) = -k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -k\frac{d\left[(T_0 - T_S)\frac{x}{\sqrt{\pi\alpha \cdot t}}\right]}{dx} = \frac{k(T_S - T_0)}{\sqrt{\pi\alpha \cdot t}}$$

# Interfase entre dos sólidos semi infinitos

- Cuando dos sólidos “semi-infinitos” (A y B) a temperaturas distintas se ponen en contacto repentimnamente, la temperatura de la interfase permanece fija durante un tiempo. Asumiendo que no hay resistencia térmica entre los sólidos, la temperatura de la interface debe ser igual en ambos materiales:

$$T_{A,i} = T_{B,i} = T_S$$

- Dado que la interfase no puede acumular calor, el flujo a través de la interfase desde un sólido al otro es debe ser igual:

$$\frac{k_A\left(T_S - T_{A,0}\right)}{\sqrt{\pi\alpha_A \cdot t}} = -\frac{k_B\left(T_S - T_{B,0}\right)}{\sqrt{\pi\alpha_B \cdot t}}$$

- Donde $T_{A,0}$ y $T_{B,0}$ son las temperaturas iniciales y Ts, la temperatura en la interfase:

$$T_S = \frac{\left(k\rho c_p\right)_A^{1/2} T_{A,0} + \left(k\rho c_p\right)_B^{1/2} T_{B,0}}{\left(k\rho c_p\right)_A^{1/2} + \left(k\rho c_p\right)_B^{1/2}}$$

- El término $k\rho c_p$ se llama “difusividad calórica” y representa la abilidad de un material a reistir un cambio brusco en temperatura en su entorno. De la ecuación anterior, se ve que un material con mayor difusividad calórica tiende a imponer su temperatura en la interfase.
- Mientras el modelo semi infinito sea aplicable, esta temperatura de interfase puede utilizarse como temperatura constante en la superficie para resolver el perfil de temperatura dentro de cada sólido.

# Flujo de calor constante en la superficie

- Otra C.B ocurre al aplicar un flujo constante de calor:

$$q(t) = q_0 = -k \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$$

- Bajo esa condición, la temperatura dentro del sólido está dada por la siguiente expresión:

$$T(x,t) = T_0 + \frac{q_0}{k} \cdot \left[ \sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}} \exp\left( \frac{-x^2}{4\alpha t} \right) + x\left( erf\left( \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) - 1 \right) \right]$$

- Con $T(x,t)$ la temperatura a una distancia x de la superficie. Para $x=0$, encontramos que la superficie incrementa su temperatura en la siguiente forma :

$$T(0,t) = T_0 + \frac{q_0}{k} \cdot \left[ \sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}} \right]$$

# Flujo de calor convectivo en la superficie

- Esta condición de borde se aplica cuando una superficie se expone a un fluido con temperatura constante y coeficiente de transferencia de calor constante. En la superficie se cumple:

$$h\left[T_\infty - T(0,t)\right] = -k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$$

- Bajo esta condición, la temperatura dentro del sólido está dada por:

$$\frac{T(x)-T_0}{T_\infty - T_0} = 1 - erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha t}{k^2}\right)\cdot\left[1 - erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right]$$

- La temperatura en la superficie puede encontrarse para $x=0$:

$$\frac{T_S(t)-T_0}{T_\infty - T_0} = 1 - \exp\left(\frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right)\cdot\left[1 - erf\left(\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right]$$