TRANSFERENCIA DE CALOR

MI31A-Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva

Prof. Tanai Marín

29 Marzo 2007

Clase #6

Transferencia de calor no estacionaria

- El balance de calor para un sistema transiente en 1D y sin fuentes volumetricas es:

Acumulación = Flujo Neto de Calor

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\frac{dq}{dx}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)$$

- En 3D y en notación vectorial:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \left(\nabla \cdot k \nabla T\right)$$

- Si la conductividad es independiente de la T y posición, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \nabla^2 T$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} \right)$$

- Siendo α, la *difusividad térmica*:
  - Es la habilidad de un material de conducir (k) energía térmica en relación a su capacidad de almacenar energía térmica (ρc_p).
  - Materiales con una gran difusividad térmica, responden rápidamente a cambios térmicos, mientras que maleriales con baja α, reponden más lentamente.

- En casos en que el sistema incluye una fuente de calor (eléctrica, microondas, decaimiento radiactivo, hydratación del cemento, reacciones químicas, calcinación, etc), $Q_{gen}(\mathrm{W/m^3})$, y si ésta es liberada, entonces se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha\left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2}\right) + \frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

Ejemplo

- Para un bloque con conductividad k y ancho L, con temperaturas fijas T_0 y T_L en los extremos, encuentre el flujo de calor en estado estacionario:

Solución:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2}$$

En estado estacionario:

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1$$

$$T = C_1 x + C_2$$

Aplicando C.B.:

$$T = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0$$

- Usando la ley de conducción de Fourier:

$$q = -k\frac{dT}{dx}$$

$$q = -k\frac{d}{dx}\left(\frac{T_L - T_0}{L}x + T_0\right) = -k\frac{T_L - T_0}{L}$$

Coordenadas cilíndricas:

- En coordenadas cilíndricas (r,ϕ,z) la equación de conducción de calor queda:

$$\frac{dT}{dt}=\alpha\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{d^2T}{d\phi^2}+\frac{d^2T}{dz^2}\right)+\frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

- Si la temperatura sólo varía en la dirección radial:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\alpha}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

Coordenadas esféricas:

- En coordenadas esféricas (r,ϕ,ω) la equación de conducción de calor, cuando la temperatura sólo varía en la dirección radial, queda:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) + \frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

Solución a problemas de conducción transiente

- Para problemas de conducción de calor en sólidos, con una componente transiente y 1 o más coordenadas, la solución puede ser encontrada para condiciones de borde e iniciales dadas.
- Matemáticamente se pueden utilizar métodos de combinación de variables, separación de variables, respuesta sinosoidal o transformada de Laplace.

Casos especiales

- Para no centrarse en los métodos matemáticos para la resolución de problemas de este tipo y para no perder de vista la aplicación práctica de la transferencia de calor no estacionaria en sólidos, se describirán dos métodos que hacen uso de simplificaciones apropiadas:
- Método de “Lump capacitance”
- Modelo de sólido semi-infinito

Método de Lump Capacitance

- En muchos sistemas, la taza de transporte de energía hacia o desde un sistema es mucho más lenta que la velocidad a la que se distribuye dentro del sistema.
- En ese caso, es razonable asumir que la energía se distribuye uniformemente a través del sistema en cada momento por lo que no hay un gradiente dentro de éste.

Método de Lump Capacitance

- Por lo tanto, el sistema puede tratarse como una sola entidad (lump).
- Ejemplo: Un bloque de cobre enfriado en aire.
  - Debido a la alta conductividad térmica del cobre y la “lenta” remosión de calor a través del aire, el bloque de Cu tiene una temperatura uniforme durante todo el proceso de enfriamiento.

- Este método, tiene una amplia variedad de aplicaciones y puede ser usado en el análisis de transferencia de calor, de masa, reactores químicos y sistemas eléctricos. En estos últimos, esta técnica se aplica a la carga o descarga de condensadores a través de alambres delgados.

Lump Capacitance: Transferencia convectiva

- Para transferencia de calor convectiva, tenemos la siguiente ecuación:

$$\rho V c_p \frac{dT(t)}{dt} = hA\left(T_\infty - T_s(t)\right)$$

- h es el coeficiente de transferencia de calor, A es la supericie del sistema, V es su volumen, ρ la densidad, c_p la capacidad calorífica, T_{inf} es la temperatura ambiente.

- cuando el método es aplicable, la temperatura en la superficie (T_s) iguala a la temperatura en el seno del sistema (T) en todo momento:

$$T_s(t)=T(t)$$

- bajo esta suposición y con una temperatura inicial T_0 del sistema, obtenemos:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT(t)}{\left(T(t)-T_\infty\right)} = -\int_0^t \frac{hA}{\rho V c_p}\, dt$$

- Como resultado:

$$\frac{T(t)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}=e^{-\frac{hA}{\rho V c_p}t}=e^{-\frac{t}{\tau}}=e^{-Bi\cdot Fo}$$

- donde la constante de tiempo τ es:

$$\tau=\frac{\rho V c_p}{hA}=\frac{\rho L_c c_p}{h}$$

- Lc es el largo característico (V/A) y se usa en la definición de los números adimensionales de *Fourier* y *Biot*:

$$Fo=\frac{kt}{\rho c_p L_c^2}=\frac{\alpha t}{L_c^2} \qquad Bi=\frac{hL_c}{k}$$

Sistema	V/A	Lc	Bi×Fo
Placa afectada por ambos lados Ancho: W	$\dfrac{WL_1L_2}{2L_1L_2}$	$\dfrac{W}{2}$	$\dfrac{2ht}{W\rho c_p}$
Cilindro Radio = R	$\dfrac{\pi R^2 L}{2\pi RL}$	$\dfrac{R}{2}$	$\dfrac{2ht}{R\rho c_p}$
Esferea Radio = R	$\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2}$	$\dfrac{R}{3}$	$\dfrac{3ht}{R\rho c_p}$

- Para determinar si el método de “lump capacitance” es aplicable o no, tenemos que ver la razón entre resistencias internas y externa.
- la transferencia de calor hacia la superficie está dada por (Tinf-Ts) y dentro del sólido, se puede aproximar por k(Ts-Tcentro)/L
- dado que durante la transferencia, la energía transferida desde el ambiente a la superficie iguala a la energía conducida desde la superficie, obtenemos:

$$\frac{T_s - T_{centro}}{T_\infty - T_s} \approx \frac{\frac{k}{L}}{1/h} = \frac{hL}{k} = Bi$$

- Si esta razón es mucho menor a 1, la resistencia a conducir calor dentro del sólido es mucho menor a la resistencia convectiv. Para Bi menores a 0.1, el error intorduducido por esta técnica es menor al 5%, lo que es aceptable

$$Bi \leq 0.1$$