



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Mecánica

# APUNTES PARA EL CURSO

ME43B

Transferencia de Calor

Profesor: Ramón Frederick G.  
Colaboración: Sergio Courtin V.

**Otoño 2006**

# Índice

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.</b>                                                                              | <b>1</b>  |
| 1.1. Definición de Transferencia de Calor . . . . .                                    | 1         |
| 1.2. Ingeniería Térmica . . . . .                                                      | 1         |
| 1.3. Termodinámica . . . . .                                                           | 3         |
| 1.4. Modos de transferencia de calor . . . . .                                         | 3         |
| 1.5. Conducción, Ley de Fourier . . . . .                                              | 3         |
| 1.6. Ecuación de Conservación de Energía o Ecuación del Calor . . . . .                | 6         |
| 1.7. Formulación General de Problemas de Conducción . . . . .                          | 7         |
| 1.8. Procesos Transientes . . . . .                                                    | 8         |
| 1.9. Procesos Permanentes . . . . .                                                    | 8         |
| 1.10. Casos de Conducción Unidireccional Permanente . . . . .                          | 9         |
| 1.11. Convección en Ambas Caras de una Placa . . . . .                                 | 11        |
| 1.12. Otras geometrías . . . . .                                                       | 11        |
| 1.13. Casos Simples en Geometría Cilíndrica . . . . .                                  | 12        |
| 1.14. Sistemas con Generación Interna de Calor . . . . .                               | 14        |
| 1.15. Superficies Extendidas (Aletas) . . . . .                                        | 15        |
| 1.15.1. Aleta de Longitud Infinita . . . . .                                           | 17        |
| 1.15.2. Aleta de Largo Finito $L$ . . . . .                                            | 18        |
| 1.15.3. Aleta con Temperatura Impuesta en Ambos Extremos . . . . .                     | 18        |
| 1.15.4. Eficiencia de aletas ( $\eta$ ) . . . . .                                      | 20        |
| 1.16. Fenómenos Transientes . . . . .                                                  | 21        |
| 1.16.1. Conducción Transiente . . . . .                                                | 21        |
| 1.16.2. Conducción Unidireccional Transiente Sin Generación Interna de Calor . . . . . | 21        |
| 1.16.3. Extensión a $2D$ . . . . .                                                     | 23        |
| 1.16.4. Conducción Transiente con Resistencia Térmica Interna Despreciable . . . . .   | 25        |
| <b>2.</b>                                                                              | <b>26</b> |
| 2.1. Intercambio de Calor Entre Dos Fluidos . . . . .                                  | 26        |
| 2.2. Balances Térmicos . . . . .                                                       | 27        |
| 2.3. Deducción de la Diferencia de Temperatura Media Logarítmica . . . . .             | 29        |

|           |                                                                                              |           |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.4.      | Convección . . . . .                                                                         | 31        |
| 2.4.1.    | Como Procede la Convección . . . . .                                                         | 31        |
| 2.4.2.    | Forma Adimensional de las Ecuaciones . . . . .                                               | 33        |
| 2.4.3.    | Flujo Externo: Capa Límite Laminar Sobre Placa Plana . . . . .                               | 34        |
| 2.4.4.    | Capa Límite Térmica . . . . .                                                                | 37        |
| 2.5.      | Convección Forzada Interna: Tubos o Canales . . . . .                                        | 40        |
| 2.5.1.    | Flujo en Tubos o Canales . . . . .                                                           | 42        |
| 2.6.      | Otros Casos de Convección Forzada . . . . .                                                  | 44        |
| 2.6.1.    | Convección Forzada en el Interior de Tubos . . . . .                                         | 45        |
| 2.6.2.    | Canales de Sección no Circular . . . . .                                                     | 46        |
| 2.6.3.    | Flujo en el Exterior de Tubos . . . . .                                                      | 46        |
| 2.6.4.    | Haces de Tubos en Flujo Cruzado . . . . .                                                    | 47        |
| 2.6.5.    | Intercambiadores de Carcasa y Tubos . . . . .                                                | 48        |
| <b>3.</b> |                                                                                              | <b>51</b> |
| 3.1.      | Procesos de Cambio de Fase: Ebullición y Condensación . . . . .                              | 51        |
| 3.2.      | Transferencia de Calor en Ebullición . . . . .                                               | 52        |
| 3.2.1.    | Ebullición en Recipientes . . . . .                                                          | 52        |
| 3.3.      | Condensación . . . . .                                                                       | 55        |
| 3.4.      | Convección Natural . . . . .                                                                 | 56        |
| 3.4.1.    | Análisis Dimensional de las Ecuaciones Diferenciales . . . . .                               | 57        |
| 3.5.      | Casos de Flujo Externo (Capa Límite Laminar y Turbulenta) . . . . .                          | 58        |
| 3.5.1.    | Convección Natural Desde Placas Planas y Cilindros Verticales . . . . .                      | 58        |
| 3.5.2.    | Exterior de Cilindros Horizontales . . . . .                                                 | 59        |
| 3.5.3.    | Placas Horizontales . . . . .                                                                | 59        |
| <b>4.</b> |                                                                                              | <b>61</b> |
| 4.1.      | Radiación Térmica . . . . .                                                                  | 61        |
| 4.1.1.    | Emisión y Ley de Kirchoff . . . . .                                                          | 62        |
| 4.1.2.    | Poder Emisivo de un Cuerpo Negro . . . . .                                                   | 63        |
| 4.2.      | Energía Radiante Total que Sale de un Cuerpo . . . . .                                       | 64        |
| 4.3.      | Intensidad de Radiación . . . . .                                                            | 64        |
| 4.4.      | Intercambio de Energía por Radiación Entre Dos Cuerpos . . . . .                             | 65        |
| 4.4.1.    | Concepto Factor de Forma . . . . .                                                           | 65        |
| 4.4.2.    | Factor de Forma Entre un Elemento de Área $dA_1$ y un Área Finita $A_2$ (Isoterma) . . . . . | 66        |
| 4.4.3.    | Factor de Forma Entre Dos Áreas Finitas $A_1$ y $A_2$ , Isotermas . . . . .                  | 66        |
| 4.5.      | Radiación en Cavidades de N Cuerpos . . . . .                                                | 67        |
| 4.5.1.    | Evaluación de los Factores de Forma . . . . .                                                | 68        |
| 4.6.      | Interpretación Circuitual de las Ecuaciones de Radiación en Recintos Cerrados . . . . .      | 69        |
| 4.6.1.    | Algunos Casos de 2 Superficies . . . . .                                                     | 71        |

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.6.2. Problema de 3 Cuerpos . . . . .                                       | 71        |
| 4.7. Radiación Combinada con Otros Modos de Transferencia de Calor . . . . . | 72        |
| <b>5. Problemas Propuestos</b>                                               | <b>74</b> |

# Capítulo 1

## 1.1. Definición de Transferencia de Calor

La Transferencia de Calor es:

1. Una Ciencia de la Ingeniería.
2. Una disciplina práctica.

Su objetivo: Cuantificar los flujos de transporte de calor en procesos naturales y de Ingeniería.

## 1.2. Ingeniería Térmica

1. Mecánica de Fluidos
2. Termodinámica
3. Transferencia de Calor

En la industria su importancia está en el Diseño de equipos, procesos y productos. Este curso junto con los anteriores (MF, TD) habilita para el estudio y diseño de máquinas térmicas. Desde el punto de vista básico, la transferencia de calor se forma parte de los fenómenos de transferencia, o de transporte, que incluye además:

1. el flujo de fluidos,
2. la circulación de corrientes eléctricas, y
3. la difusión de un soluto en un solvente (llamada transferencia de masa).

En todos los fenómenos de transferencia identificamos:

- Una diferencia de potencial, o fuerza conductora que causa la transferencia
- Un flujo de la entidad que se transfiere, entre puntos a potenciales diferentes.

- Una resistencia que el medio opone a la transferencia en la región en que existe la diferencia de potencial.

El potencial para la transferencia de calor es una diferencia de temperatura ( $\Delta T = T_1 - T_2$ ), en la región en que se realiza la transferencia. El calor se transfiere de alta a baja temperatura. El medio a través del cual el calor se transfiere opone una resistencia a la transferencia ( $R$ ).

Por ejemplo: si la pared de una casa tiene 22 °C por el exterior y a 18 °C por el interior, habrá flujo de calor desde el exterior al interior.

La magnitud de este flujo depende de:

1. la diferencia de temperatura (4°C ó 4K),
2. de la propiedad del material llamada "conductividad térmica" y del espesor de la pared.

Se tiene entonces la siguiente relación genérica para el flujo de calor  $Q$  a través de un medio material:

$$Q = \frac{\Delta T}{R} \quad (1.1)$$

- el flujo de calor  $Q$  se expresa en Watts,
- la diferencia de temperatura en K (o en °C)
- y la resistencia en  $\frac{K}{Watt}$

El flujo de calor es, entonces la cantidad de calor transferida por unidad de tiempo entre puntos a temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ .

### 1.3. Termodinámica

Predice la cantidad de energía que se requiere para llevar un sistema desde un estado a otro. No informa sobre la velocidad de este proceso ni sobre el tiempo necesario para completarlo. La transferencia de calor complementa a los principios de la TD, mediante leyes adicionales que permiten calcular la "velocidad" con que el calor se transfiere.

### 1.4. Modos de transferencia de calor

1. **Conducción:** Transferencia de calor en un sólido o un fluido en reposo mediante movimiento a escala molecular, que es más intenso a mayor temperatura.
2. **Convección:** Transferencia de calor dentro de un fluido que fluye con movimientos a escala macroscópica.
3. **Radiación:** Emisión de radiación electromagnética por cuerpos a temperaturas distintas al cero absoluto. Las radiaciones en el rango de longitudes de onda entre 0,1 y 100 micrometros tienen efecto térmico cuando se emiten o absorben.

### 1.5. Conducción, Ley de Fourier

Las leyes generales de la física (principios de la Termodinámica y leyes de movimiento del fluido) no son suficientes para el estudio de la transferencia de calor. Se necesitan leyes particulares específicas para la conducción y la radiación. (La convección no requiere leyes extras ya que es un fenómeno que resulta de la combinación entre la conducción de calor y el flujo de un fluido).

Se transfiere calor de alta a baja temperatura. Fourier (en 1822) encontró que "el flujo de calor en el interior de un sólido o de un fluido en reposo es proporcional al gradiente local de temperatura y a la conductividad térmica del material". Esta ley se derivó de observaciones empíricas.

Supone que el material se comporta como un medio continuo. La expresión matemática de la ley es como sigue:

En un medio en que existe un campo de temperatura  $T(X, Y, Z, t)$ , la ley de Fourier expresa los flujos de calor instantáneos en las tres direcciones por:

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.3)$$

$$q_z = -k_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.4)$$

- $q$  es el flujo de calor por unidad de tiempo, y por unidad del área normal a la dirección de propagación.
- $k$  es la conductividad térmica del material.

Convención de signo: Los flujos de calor son positivos en el sentido positivo de la coordenada. Para esto, la temperatura debe decrecer en el sentido positivo de la coordenada, es decir,  $\frac{\partial T}{\partial x} < 0$ . Por lo tanto, el signo menos sirve para cumplir la convención. Unidades de  $q$ :

1.  $\frac{W}{m^2}$
2.  $\frac{kcal}{hrm^2}$
3.  $\frac{BTU}{hrpie^2}$

Unidades de  $T$ :

1.  $^{\circ}C$
2.  $K$
3.  $^{\circ}F$

Unidades de las Coordenadas:

1. metros
2. pies



Unidades de conductividad térmica:

1.  $\frac{W}{m^{\circ}C}$  ó  $\frac{W}{mK}$  en SI.
2.  $\frac{Kcal}{hrm^{\circ}C}$  en MKS y
3.  $\frac{BTU}{hrpie^{\circ}F}$  en sistema inglés.

Las conductividades térmicas pueden variar con la dirección en sólidos con fibras (ej. madera, materiales compuestos). En la mayoría de los metales y aleaciones, así como en los fluidos, las conductividades son independientes de la dirección (material isotrópico). Finalmente, las conductividades pueden ser dependientes de la temperatura. La forma más usual de dependencia de  $k$  con  $T$  es la lineal creciente. Valores seleccionados de conductividad térmica  $\frac{W}{mK}$ , a  $0^{\circ}C$ .

|          |     |        |       |             |       |
|----------|-----|--------|-------|-------------|-------|
| Plata    | 410 | Cuarzo | 41.6  | Refrig.R-12 | 0.073 |
| Cobre    | 385 | vidrio | 1.83  | Helio       | 0.141 |
| Aluminio | 202 | mármol | 0.78  | Aire        | 0.024 |
| Fierro   | 73  | agua   | 0.556 | $CO_2$      | 0.015 |

Aislantes:  $k < 0.1 \frac{W}{mK}$

## 1.6. Ecuación de Conservación de Energía o Ecuación del Calor

Expresa el primer principio de la TD para un sólido o un fluido en reposo. En un medio tridimensional con un campo de temperatura  $T = T(x, y, z, t)$ , el balance instantáneo de energía en un volumen de control fijo en el espacio se escribe:

$$Energía_{entra} + Energía_{generada} = Energía_{sale} + Energía_{acumulada} \quad (1.5)$$

1. Las energías entran y salen del volumen de control por conducción.
2. Se genera energía dentro de este volumen mediante fuentes que pueden ser eléctricas, químicas o nucleares.
3. La energía puede acumularse en el V.C. debido a la capacidad térmica del cuerpo.

Si se tiene una fuente térmica, Sea  $S$  la tasa de generación de energía por unidad de volumen y de tiempo en el volumen de control. El balance anterior expresado en forma diferencial se escribe como:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + S \quad (1.6)$$

Reemplazando en los flujos de calor por conducción la ley de Fourier tenemos:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S \quad (1.7)$$

Si la conductividad es constante e isotrópica, esta ecuación se puede poner en la forma más común:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + S \quad (1.8)$$

Los términos, de izquierda a derecha, representan:

- el término transiente o de acumulación de energía en el volumen de control,
- los términos conductivos
- y el término fuente.

## 1.7. Formulación General de Problemas de Conducción

**OBJETIVO:** Determinar las temperaturas y los flujos de calor en un material sólido sometido a condiciones externas y con un estado inicial.

En general  $T = T(x, y, z, t)$ . Se determina primero el campo de temperatura resolviendo la ecuación del calor. Luego se determina los flujos de calor mediante la ley de Fourier. La ecuación para sólido isótropo y de conductividad constante es:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + S \quad (1.9)$$

Condición inicial para la temperatura:  $T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$

Condiciones de borde para la temperatura: Se necesitan dos por cada dirección (ya que la ecuación es de 2° orden en  $T$ ). Son de varios tipos:

1. Temperatura impuesta ( $T_1$ ) en un borde en  $x = 0$ :

$$T(0, y, z, t) = T_1$$

2. Flujo de calor impuesto en un borde en  $x = 0$ :

$$q_0 = -k \frac{\partial T(0, y, z, t)}{\partial x}$$

3. Para una superficie sólida en contacto con un fluido en movimiento, habrá transferencia de calor por convección. La condición de convección desde la superficie en  $x=0$  a un fluido a temperatura  $T_1$ :

$$h(T_1 - T(0, x, y, t)) = -k \frac{\partial T(0, y, z, t)}{\partial x}$$

$h$  es el "coeficiente convectivo", que se define así:

El calor por unidad de área que recibe o entrega una superficie sólida en contacto con un fluido a distinta temperatura es proporcional a la diferencia entre

- la temperatura de la pared
- y la temperatura media del fluido.

Esta es la llamada "Ley de enfriamiento de Newton", que se expresa:

$$q = h \Delta T \quad (1.10)$$

El coeficiente convectivo se expresa en  $\frac{W}{m^2K}$  y NO es una propiedad física, sino que debe determinarse independientemente para cada situación, a partir de información adicional,  $h$  depende de la geometría, del régimen del flujo del fluido y de las propiedades termofísicas de éste. Se verá su determinación en la parte de convección de este curso.

## 1.8. Procesos Transientes

A partir de un cambio de condiciones de borde, la temperatura en cada punto evoluciona en el tiempo.  $T(x, y, z, t)$ .

## 1.9. Procesos Permanentes

Después de un tiempo suficiente desde el cambio de condiciones de borde, se alcanza un "régimen permanente", en que la temperatura ya no varía en el tiempo. Esta condición se expresa:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.11)$$

## 1.10. Casos de Conducción Unidireccional Permanente

El problema más simple de conducción se describe así:

- Se tiene una placa o pared de espesor  $L$
- con dos caras a diferentes temperaturas ( $T_1 < T_2$ ),
- se ha alcanzado un régimen permanente
- no hay generación de calor ( $S=0$ ).

Si no hay gradientes de temperatura definidos según las direcciones  $y$  y  $z$ , y si el régimen es permanente, la ecuación del calor se reduce a:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (1.12)$$

con:  $T = T_1$  en  $x = 0$ ,  $T = T_2$  en  $x = L$ . La solución es:

$$T(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 \quad (1.13)$$

Aplicando la ley de Fourier a esta distribución de Temperatura, se obtiene el flujo de calor a través de la pared, que es:

$$q = -\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k(T_1 - T_2)}{L} = -\frac{k\Delta T}{L} \quad (1.14)$$

Donde  $\Delta T = T_2 - T_1$ . El flujo de calor es, entonces, independiente de la coordenada  $x$ . Si la placa tiene un área  $A$ , normal al flujo de calor, el calor total que la atraviesa es:

$$Q = \frac{kA(T_1 - T_2)}{L} \quad (1.15)$$

Los dispositivos para la determinación experimental de conductividades térmicas se basan en reproducir esta situación. Si se escribe la ecuación anterior en la forma:

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L}{kA}} \quad (1.16)$$

Para dos placas paralelas en contacto, el flujo de calor es común a ambas. Las placas tienen resistencias térmicas que están conectadas en serie. En ausencia de fuentes o sumideros de calor en la superficie de contacto, el mismo flujo de calor atraviesa las dos placas. Este es:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{L_1/k_1A + L_2/k_2A} \quad (1.17)$$

En términos del flujo  $q$ , se escribe:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{L_1/k_1 + L_2/k_2} \quad (1.18)$$

Para obtener este resultado, se usa la solución de una placa para las dos placas por separado. Si se tiene un arreglo de  $n$  placas paralelas:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\sum L_i/k_i} \quad (1.19)$$

### 1.11. Convección en Ambas Caras de una Placa

Se tiene una placa plana de espesor  $K$  y conductividad  $k$ . La placa está en contacto con fluidos en sus dos caras. En este caso se conocen inicialmente las temperaturas medias de ambos fluidos, pero no las temperaturas de las caras.

**Fluido 1:**  $T_1$

**Fluido 2:**  $T_2$  (temperaturas de mezcla)

**Las caras izquierda y derecha estarán a  $T_1'$  y  $T_2'$**

Por lo tanto:

$$q = \frac{k(T_1' - T_2')}{L} \quad (1.20)$$

El calor se expresa también según la condición de borde de convección:

$$q = h_1(T_1 - T_1') = h_2(T_2' - T_2) \quad (1.21)$$

Despejando las tres diferencias de temperatura, y sumándolas, se obtiene:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{l/h_1 + L/k + l/h_2} \quad (1.22)$$

Esta ecuación permite calcular las pérdidas o ganancias de calor de un recinto a través de sus paredes, considerando conocidas las temperaturas de los medios interno y externo. Se extiende fácilmente esta ecuación para placas compuestas con convección en sus dos caras.

### 1.12. Otras geometrías

La ecuación del calor en otros sistemas coordenados se escribe, para conductividad constante e isotrópica, en las siguientes formas, considerando que solo hay que poner la forma apropiada del operador laplaciano.

En coordenadas cilíndricas:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + S \quad (1.23)$$

Los componentes de flujo de calor (ley de Fourier) son:

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (1.24)$$

$$q_\phi = \frac{-k}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (1.25)$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.26)$$

En coordenadas esféricas:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial (\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + S \quad (1.27)$$

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (1.28)$$

$$q_\theta = \frac{-k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (1.29)$$

$$q_\phi = -\frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (1.30)$$

Para obtener estas formas solo basta encontrar la expresión del Laplaciano en los distintos sistemas coordenados.

### 1.13. Casos Simples en Geometría Cilíndrica

La geometría cilíndrica es importante en el caso de tubos que conducen un fluido. Esta situación se da en la mayoría de los intercambiadores de calor industriales.

Consideremos un casquete cilíndrico (tubo) de radio interno  $r_1$  y radio externo  $r_2$ . Sea  $T = T_1$  en  $r_1$  y  $T = T_2$  en  $r_2$ . Si solo se define un gradiente radial de temperatura, en régimen permanente y sin generación interna de calor, la ecuación del calor se reduce a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (1.31)$$

Cuya solución es:

$$T = M \ln(r) + N \quad (1.32)$$

El flujo radial de calor es:

$$Q_r = -2k\pi r L \frac{\partial T}{\partial r} \quad (1.33)$$

Obteniendo la distribución de temperatura se demuestra que:

$$Q_r = \frac{2k\pi L(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (1.34)$$



El concepto de resistencia térmica se usa para paredes cilíndricas concéntricas de largo común y diferente conductividad térmica: Para una pared con 3 capas:

$$Q_r = \frac{2\pi L(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)/k_1 + \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)/k_2 + \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)/k_3} \quad (1.35)$$

Igual que en el caso de paredes planas, se puede tratar el caso de convección con un fluido interior a temperatura  $T_1$  y un fluido exterior a  $T_2$ . Habrá tres resistencias (2 convectivas y una conductiva). El calor transferido radialmente a través de la pared del tubo es:

$$Q_r = \frac{2k\pi L(T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{h_2 r_2}} \quad (1.36)$$

Esta ecuación representa el calor transferido de un fluido a otro a través de una pared cilíndrica (tubo). Si se desea aislar el tubo, se coloca una capa de material de conductividad  $k_2$ , hasta un radio  $r_3$ . Para que la aislación sea efectiva, la resistencia agregada debe ser mucho mayor que las restantes.

$$Q_r = \frac{2k\pi L(T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{h_2 r_3}} \quad (1.37)$$

## 1.14. Sistemas con Generación Interna de Calor

La generación interna de calor se traduce en la inclusión de un término fuente en la ecuación del calor.

Ejemplo: Conductor eléctrico cilíndrico, de radio  $R$  y longitud  $L$ . Se genera en el interior el calor  $S$  en  $\text{W}/\text{m}^3$ . Se supone que la tasa de generación por unidad de volumen es uniforme. Sea la temperatura ambiente,  $T_0$  y el coeficiente convectivo exterior:  $h$ . La temperatura superficial del alambre,  $T_p$ , está por determinar.

La ecuación del calor para conducción radial, permanente, con generación de calor es:

$$\frac{k}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + S = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Sr}{2k} + \frac{C_1}{r} \quad (1.39)$$

En el eje del alambre ( $r = 0$ ) el flujo de calor debe ser nulo, lo que implica  $\frac{dT}{dr} = 0$  en esa posición, por lo tanto  $C_1 = 0$ . El calor disipado por la superficie es:

$$Q = -2k\pi rL \left( \frac{dT(R)}{dr} \right) = -2k\pi rL \left( \frac{-SR}{2k} \right) = S\pi R^2 L \quad (1.40)$$

Esto es igual al calor total generado en el alambre (tasa de generación multiplicada por el volumen). A este resultado hemos llegado sin aplicar la condición de borde. Es decir, el alambre estará obligado a disipar toda la energía generada en su interior, para lo cual adoptará la temperatura superficial necesaria.

Integrando una vez:

$$T = -\frac{Sr^2}{4k} + C_2 \quad (1.41)$$

En la superficie:

$$T_p = -\frac{SR^2}{4k} + C_2 \quad (1.42)$$

Determinamos  $C_2$  aplicando la condición de borde de convección:

$$Q = S\pi R^2 L = h(T_p - T_0) = h \left( -\frac{SR^2}{4k} + C_2 - T_0 \right) 2\pi RL \quad (1.43)$$

De donde:

$$C_2 = \frac{SR}{2h} \frac{SR^2}{4k} + T_0 \quad (1.44)$$

Con lo cual:

$$T_p = T_0 + \frac{SR}{2h} \quad (1.45)$$

Para disipar el calor generado, la superficie adopta una temperatura cuyo exceso sobre el ambiente:

- Aumenta con el calor generado y
- Disminuye con aumentos del coeficiente de convección

Este ejemplo muestra que en sistemas con generación interna de calor, el calor disipado está impuesto, y la temperatura es la variable dependiente, que resulta de la capacidad de disipación del sistema.

## 1.15. Superficies Extendidas (Aletas)

Dada la relación que expresa el intercambio de calor por convección de un sólido a un fluido:

$$Q = hA\Delta T \quad (1.46)$$

Se deduce que el calor disipado por una superficie aumenta con:

- el coeficiente convectivo,
- el área expuesta al fluido, y
- la diferencia de temperatura entre la superficie y el fluido.

En los casos en que interesa **augmentar** la disipación desde una superficie (ej. carcasa de motores, intercambiadores de calor) se recurre al uso de superficies extendidas (aletas), especialmente si se tiene una pequeña diferencia de temperatura y un bajo coeficiente convectivo.

Consideremos una superficie plana a temperatura  $T_p$ , a la cual se le agrega una barra (o aleta) de sección rectangular,

- de espesor  $b$  (según la dirección vertical,  $y$ )
- largo  $L$  (según la coordenada  $x$ , normal a la superficie base)
- anchura  $l$  (según la dirección lateral,  $z$ ).

El medio ambiente (aire) está a  $T_0$ . En principio la distribución de temperatura es tridimensional,  $T(x,y,z)$ . Pero si se supone que:

1. No hay gradiente de Temperatura definido en la dirección  $z$  ( $\partial T/\partial z=0$ ).

2. El espesor  $b$  es pequeño, de modo que  $b/k \ll L/k$  (resistencia según el espesor despreciable).

La menor resistencia según el espesor implica que la caída de temperatura según esta dirección es baja, es decir, aproximadamente  $\partial T/\partial y=0$ . Entonces  $T=T(x)$  y el problema puede considerarse como de conducción unidireccional en dirección  $x$ , con convección en el contorno.

La suposición unidireccional impide usar la ecuación general del calor para formular este problema, ya que no podría plantearse la condición de borde mixta de convección y conducción en las caras superior e inferior. En lugar de eso se escribe un balance de energía para un elemento  $\Delta x$  de la aleta.

Sea  $A$  el área de transferencia, normal a la dirección  $x$ . Sea  $p$  el perímetro de esta sección rectangular.  $A = bl$ ,  $p = 2(b + l)$ . Un balance de energía para un elemento  $\Delta x$  se escribe:

$$q_x = q_{x+\Delta x}A + hp\Delta x(T - T_0) \quad (1.47)$$

$$q_{x+\Delta x} = q_x + \frac{dq}{dx}\Delta x \quad (1.48)$$

$$q = -k \frac{dT}{dx} \quad (1.49)$$

Haciendo los reemplazos correspondientes se obtiene de las ecuaciones anteriores la ecuación característica de la aleta:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2(T - T_0) = 0 \quad (1.50)$$

$$m = \left( \frac{hp}{kA} \right)^{1/2} \quad (1.51)$$

Esta ecuación genera soluciones exponenciales. Para resolverla se homogeniza con la variable  $T = T - T_0$ , (que representa el exceso de temperatura en la aleta sobre el ambiente) quedando:

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - m^2\Theta = 0 \quad (1.52)$$

Cuya solución puede escribirse de dos formas:

$$\Theta = C_3 \sinh(mx) + C_4 \cosh(mx) \quad (1.53)$$

$$\Theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (1.54)$$

El parámetro  $m$  reúne las propiedades físicas y geométricas. El calor se conduce a lo largo de la aleta y es disipado por convección desde el perímetro de ésta.

### 1.15.1. Aleta de Longitud Infinita

Las condiciones de borde son:

1.  $T=T_1$  en  $x=0$ , o bien:  $\Theta=\Theta_1= T_1-T_0$  en  $x=0$ , base de la aleta.
2. Si la aleta es muy larga, la temperatura lejos de la base tenderá a la ambiente. Esto se expresa de la siguiente forma:  $\Theta_1 \rightarrow 0$ , si  $x \rightarrow \infty$

La condición 2 es incompatible con un crecimiento exponencial, luego  $C_1=0$ . Para determinar  $C_2$ , se usa la C.B.1, quedando:

$$\Theta = \Theta_1 e^{-mx} \quad (1.55)$$

Se puede ver la progresión de temperatura en la figura siguiente, para diferentes valores de  $m$ . En cada caso, la temperatura decrece con  $x$  (aumento de la distancia a la base),  $m$  aumenta con  $h$  y  $p$ , y disminuye con  $k$  y  $A$ . Por lo tanto, la temperatura cae más rápidamente en medios con alto coeficiente convectivo, y de gran perímetro. (Condiciones que favorecen la disipación convectiva). La temperatura cae lentamente para materiales de alta conductividad y para aletas con gran área de transferencia. (Condiciones que favorecen la conducción).

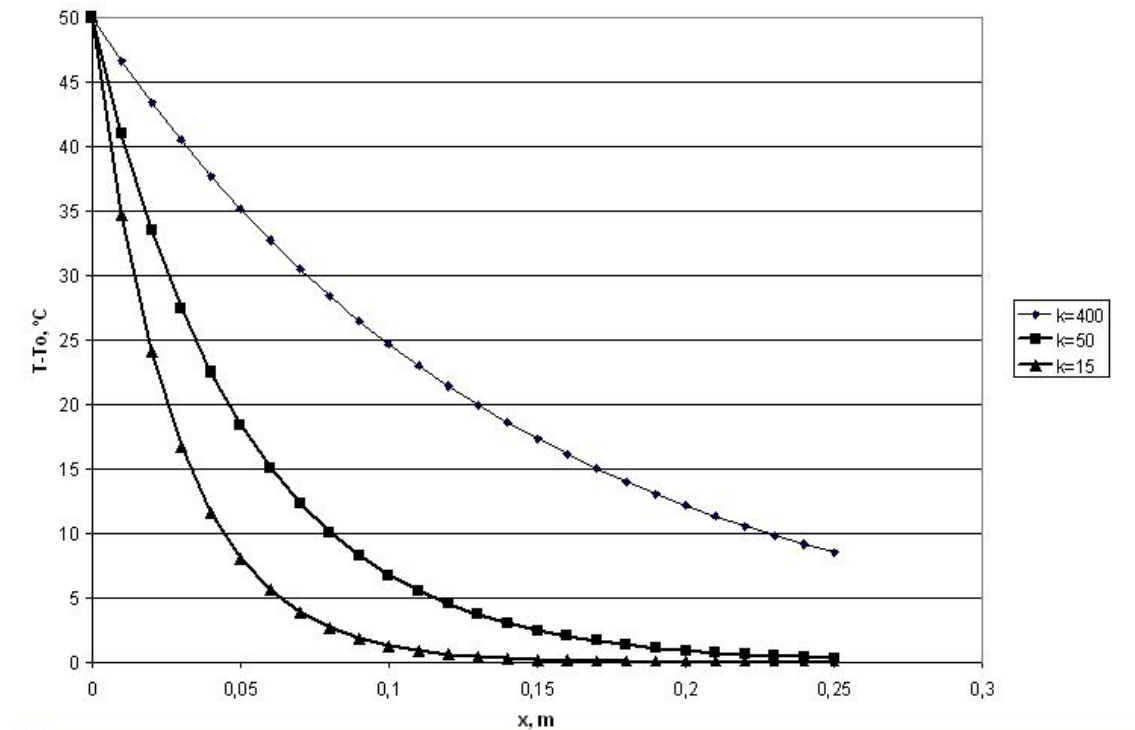


Figura 1.1: Distribución de Temperaturas en Aletas

El decrecimiento de la temperatura, aunque exponencial, se aproxima más a la linealidad para casos en que predomina la conducción ( $k$  alto). Si la distribución de temperatura fuera lineal, se habla de

aleta "perfectamente conductora", por analogía con el caso de la pared sólida en que la transferencia de calor es solo por conducción. El calor total disipado por la aleta hacia el medio es el que pasa a través de la base de la aleta, y se puede evaluar usando la Ley de Fourier con la distribución de temperatura encontrada.

$$Q = -kA \frac{\partial T(0)}{\partial x} = -kA \frac{\partial \Theta(0)}{\partial x} = \Theta_1 \sqrt{hpkA} \quad (1.56)$$

### 1.15.2. Aleta de Largo Finito $L$

Si la aleta tiene un largo finito, la segunda condición de borde debe ser modificada. Una condición muy usada es la de "extremo adiabático", que se expresa:  $dT/dx = d\Theta/dX = 0$ , en  $x = L$ . Esta condición es algo irreal, pero es una forma de no forzar a que la punta de la aleta tenga una temperatura determinada. Con la otra condición ( $\Theta = \Theta_1$ , en  $x = 0$ ), la solución es:

$$\Theta = \Theta_1 [-\tanh(mL) \sinh(mx) + \cosh(mx)] \quad (1.57)$$

Con esta distribución de temperatura, el flujo de calor evaluado en la base es:

$$\Theta = -kA \frac{\partial \Theta(x=0)}{\partial x} = \Theta_1 \sqrt{hpkA} \tanh(mL) \quad (1.58)$$

La tangente hiperbólica crece con  $mL$  hasta  $mL=5$ . Para mayores valores de  $mL$ ,  $\tanh(mL) = 1$ . Por lo tanto, para  $mL \leq 5$ , la transferencia de calor desde la aleta es igual a la de una aleta de longitud infinita. Para cualquier punto más allá de  $mx=5$ , la temperatura sobre la aleta es la del ambiente, por lo tanto no hay disipación. El exceso de temperatura en el extremo de la aleta es:

$$\Theta(L) = \Theta_1 [-\tanh(mL) \sinh(mL) + \cosh(mL)] \quad (1.59)$$

el cual se reduce a cero cuando  $mL \geq 5$ , es decir, no hay disipación de calor desde los valores de  $x$  en que se alcanza la temperatura ambiente.

### 1.15.3. Aleta con Temperatura Impuesta en Ambos Extremos

Dada la ecuación de aleta:

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - m^2\Theta = 0 \quad (1.60)$$

Suponemos que esta en contacto con dos paredes, a distancia  $2L$ . Ponemos el origen de coordenadas en el centro de la aleta. Los excesos de temperatura en los extremos son:

$$\Theta(x = -L) = \Theta_1$$

$$\Theta(x = L) = \Theta_2$$

Usando la solución exponencial, la distribución de temperatura es:

$$\Theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (1.61)$$

en que las constantes son:

$$C_1 = \frac{e^{-mL} (\Theta_1 e^{-2mL} - \Theta_2)}{e^{-4mL} - 1} \quad (1.62)$$

$$C_2 = \frac{e^{-mL} (\Theta_2 e^{-2mL} - \Theta_1)}{e^{-4mL} - 1} \quad (1.63)$$

El calor transferido al aire ambiente es:

$$Q = \int_{-L}^L hp\Theta dx \quad (1.64)$$

de donde:

$$Q = (\Theta_1 + \Theta_2)(hpkA)^{1/2}K \quad (1.65)$$

$$K = \frac{1 - e^{-2mL}}{1 + e^{-2mL}} \quad (1.66)$$

$K$  en función de  $mL$ :

|      |   |        |       |       |        |        |
|------|---|--------|-------|-------|--------|--------|
| $mL$ | 0 | 1      | 2     | 3     | 4      | 5      |
| $K$  | 0 | 0.7616 | 0.964 | 0.995 | 0.9993 | 0.9999 |

Luego para  $K > 5$ , este sistema se comporta como dos aletas independientes. La figura anexa muestra la distribución de temperaturas en función de  $mL$ .

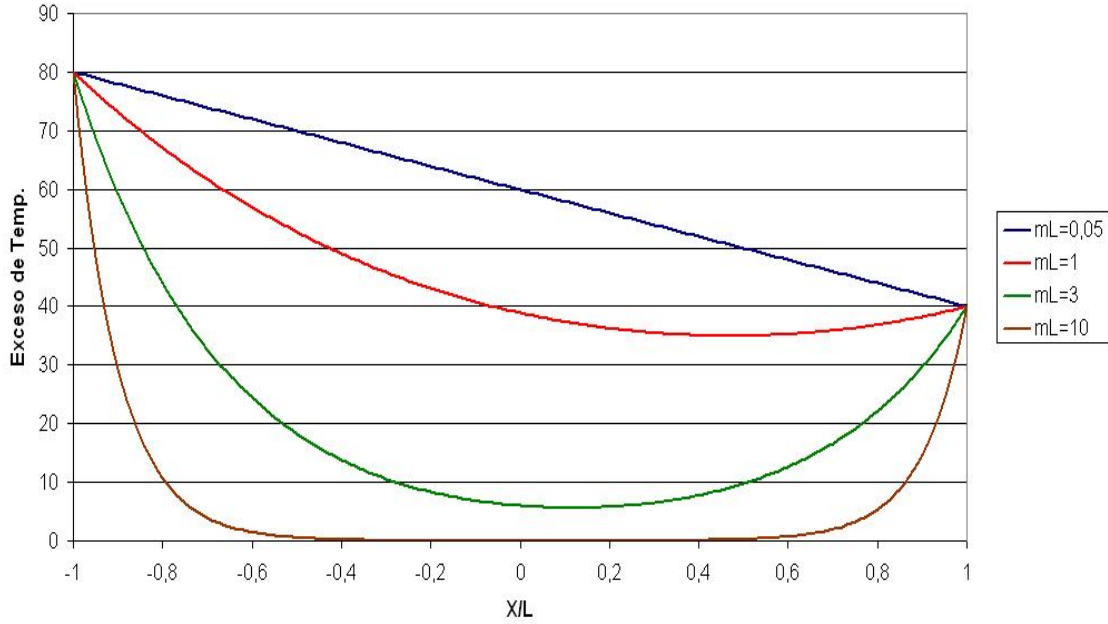


Figura 1.2: Aleta con 2 Extremos a Temperatura Impuesta

#### 1.15.4. Eficiencia de aletas ( $\eta$ )

Se ha visto que la temperatura en la aleta decrece con  $x$ , por lo tanto su efectividad como superficie disipadora es menor que la de la superficie base. Para tener una medida cuantitativa de la efectividad de una aleta se recurre al concepto de eficiencia de aleta. Se define esta como:

*$\eta$ : calor real transferido por la aleta/calor que se transferiría si estuviera a una temperatura uniforme e igual a la de la base.*

El denominador puede considerarse igual al transferido por la aleta si su conductividad fuera infinita. Para la aleta de extremo adiabático, la definición implica:

$$\eta = \frac{\Theta_1 \sqrt{hpkA} \tanh(mL)}{\Theta_1 h p L} = \frac{\tanh(mL)}{mL} \quad (1.67)$$

Se puede ver que esta eficiencia decrece con la longitud de la aleta. En particular, cuando  $mL > 5$ ,  $\eta \approx 1/(mL)$ .



La eficiencia de diversas formas de aleta está tabulada en diversos textos, permitiendo el cálculo del calor transferido en base a este parámetro y al calor para  $k = \infty$ , el que es fácil de determinar.

## 1.16. Fenómenos Transientes

En la mayoría de las aplicaciones, el establecimiento de condiciones estables o permanentes requiere de un tiempo. En los intercambiadores de calor que funcionan en forma continua, el régimen permanente se alcanza poco tiempo después del inicio del bombeo de los fluidos, y no se considera en el diseño. En otras aplicaciones, como tratamientos térmicos de metales, enfriamiento y congelación de alimentos, e intercambiadores "batch" del tipo serpentín con estanque agitado (por nombrar sólo algunos casos), la parte relevante del proceso de transferencia de calor está en el estado transiente. En la etapa de diseño de intercambiadores que funcionen en régimen transiente es necesario realizar una simulación dinámica (en el tiempo) de su funcionamiento. La simulación tiene como objetivo determinar el tiempo que se requerirá para transferir una determinada cantidad de calor, o para alcanzar un determinado nivel de temperatura.

### 1.16.1. Conducción Transiente

Se tiene un sólido a temperatura inicial uniforme  $T_0$ . En un instante  $t=0$ , se sumerge el sólido en un medio a temperatura  $T_\infty$ . La temperatura del sólido variará en el tiempo hasta alcanzar, como límite, la temperatura del nuevo medio. Dependiendo del signo de  $T_\infty - T_0$ , se tratará de un calentamiento o enfriamiento transiente. Los procesos de ambos tipos se pueden tratar en forma unificada, en términos de la temperatura adimensional:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

El valor de esta expresión es 1 en el estado inicial y 0 en el final. Por lo tanto, esta temperatura adimensional decrece con el tiempo, tanto para calentamientos como para enfriamientos.

### 1.16.2. Conducción Unidireccional Transiente Sin Generación Interna de Calor

Se tiene una placa plana de espesor  $2L$ , con las otras dimensiones infinitas. Las propiedades físicas relevantes son:

- Conductividad térmica:  $k$
- Calor específico:  $C$
- Densidad:  $\rho$

Condiciones iniciales y de borde:

- Temperatura inicial:  $T_0$  (uniforme)
- Temperatura ambiente:  $T_\infty$

- Coeficiente convectivo entre la superficie y el fluido exterior:  $h$

La coordenada  $x$  tiene origen en plano de simetría de la pared. Para conducción unidireccional sin generación interna de calor, la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales y de borde son:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1.68)$$

$$T(x, 0) = T_0 \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.70)$$

$$-k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h (T(L, t) - T_\infty) \quad (1.71)$$

En que  $\alpha = k/\rho C$  es la difusividad térmica del sólido. Esta propiedad, en  $m^2/s$ , representa la razón entre las propiedades de transferir calor y las de almacenarlo. La solución de la ecuación se puede obtener por el método de separación de variables. La solución es:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n L)}{\lambda_n L + \sin(\lambda_n L) \cos(\lambda_n L)} \exp\left(-\frac{\alpha t}{L^2} (\lambda_n L)^2\right) \cos\left(\lambda_n L \frac{x}{L}\right) \quad (1.72)$$

en que los  $\lambda_n L$  son las infinitas raíces de la ecuación siguiente, que se deriva de la condición de borde de convección:

$$\tan(\lambda_n L) = \frac{Bi}{\lambda_n L} \quad (1.73)$$

$Bi$  es el "número de Biot"  $= hL/k$ .  $Bi$  es un grupo adimensional que representa la razón entre la resistencia térmica conductiva en el semi espesor del sólido y la resistencia convectiva externa, es decir:

$$Bi = \frac{L/k}{1/h} \quad (1.74)$$

Un alto valor de  $Bi$  significa que la resistencia conductiva interior es mayor que la convectiva exterior, luego habrá grandes gradientes de temperatura en el interior del sólido. En cambio si  $Bi$  es bajo (por ej. 0,1), la resistencia conductiva es baja y la temperatura en el interior del sólido es prácticamente uniforme en cada instante.

Otros grupos adimensionales son:  $Fo = \alpha t/L^2$  (Número de Fourier o tiempo adimensionalizado), y la coordenada adimensional  $x/L$ . Se observa que la solución, en términos de grupos adimensionales, se resume en la dependencia:

$$\frac{T - T_\infty}{T - T_0} = f(fo, Bi, x/L) \quad (1.75)$$

La solución se puede representar gráficamente utilizando la dependencia anterior. Los diagramas de Heisler, basados en la solución analítica, representan las distribuciones de temperatura en el plano de simetría ( $x/L=0$ ). Estos se pueden ver en libros. Los rangos de los grupos adimensionales en estos diagramas son los rangos de interés práctico. Existe un gráfico adicional que da cuenta de las temperaturas fuera del plano de simetría. En estos gráficos la temperatura fuera de ese plano se obtiene como producto de las ordenadas de los gráficos primario y secundario. En este último las variables independientes son  $Bi$  y  $x/L$ .

### 1.16.3. Extensión a 2D

Se tiene ahora una región rectangular de lados  $2L$  y  $2l$  sometida a las mismas condiciones anteriores. La ecuación diferencial y las condiciones son ahora:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1.76)$$

$$T(x, y, 0) = T_0 \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.78)$$

$$-k \frac{\partial T(L, y, t)}{\partial x} = h (T(L, y, t) - T_\infty) \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} = 0 \quad (1.80)$$

$$-k \frac{\partial T(L, l, t)}{\partial y} = h (T(L, l, t) - T_\infty) \quad (1.81)$$

Se intenta la separación de variables siguiente:

$$\Theta(x, y, t) = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = X(x, t)Y(y, t) \quad (1.82)$$

reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\frac{l}{Y} \left( \frac{\partial Y}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \right) = \frac{l}{X} \left( \frac{\partial X}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) \right) = \pm \lambda^2(t) \quad (1.83)$$

El lado izquierdo depende sólo de  $y$ , el derecho sólo de  $x$ , luego ambos deben ser solo funciones de  $t$ . Sin embargo, las condiciones son estrictamente equivalentes para las dos direcciones. La equivalencia se cumple solo si  $\lambda$  es cero. Por lo tanto, se supone  $\lambda=0$ , y entonces la solución de la distribución de temperatura bidimensional es el producto de dos soluciones unidimensionales, que se obtienen de la solución de:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (1.84)$$

$$X(x, 0) = l \quad (1.85)$$

$$\frac{\partial X(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.86)$$

$$-k \frac{\partial X(L, t)}{\partial x} = hX(L, t) \quad (1.87)$$

y de otro conjunto de ecuaciones/condiciones exactamente similar para  $Y$ . Estos problemas tienen soluciones adimensionales iguales a la del problema unidimensional, con sus respectivos grupos adimensionales. En consecuencia, la solución  $2D$  se puede escribir:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \left( \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)_{2L} \left( \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)_{2l} \quad (1.88)$$

Y, por extensión a tres dimensiones, en un paralelepípedo de lados  $2L$ ,  $2l$  y  $2\lambda$ , la temperatura es:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \left( \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)_{2L} \left( \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)_{2l} \left( \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)_{2\lambda} \quad (1.89)$$

En los casos  $2D$  y  $3D$  la sección rectangular y el paralelepípedo se pueden considerar como las intersecciones de 2 y 3 placas infinitas respectivamente. En el caso de un paralelepípedo rectangular hay que evaluar tres Biots y tres Fourier, ya que aunque las propiedades físicas son idénticas, la diferencia de longitudes en las distintas direcciones define números de  $Bi$  y  $Fo$  distintos para las distintas direcciones. Existen soluciones analíticas exactas para conducción radial en cilindro infinito y en esfera. En estas geometrías definimos las variables adimensionales como:

$$\eta = \frac{r}{R} \quad (1.90)$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{R^2} \quad (1.91)$$

$$Bi = \frac{hR}{k} \quad (1.92)$$

**Cilindro:** Distribución de temperatura y ecuación para valores característicos:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R (J_0^2 \lambda_n L) + (J_1^2 \lambda_n R)} \exp\left(-\frac{\alpha t}{R^2} (\lambda_n R)^2\right) J_0(\lambda_n R \eta) \quad (1.93)$$

$$(\lambda_n R) J_0(\lambda_n R) - Bi J_0(\lambda_n R) = 0 \quad (1.94)$$

**Esfera:**

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n R) - \lambda_n R \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n R - \sin(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)} \exp\left(-\frac{\alpha t}{R^2}(\lambda_n L)^2\right) \cos(\lambda_n R \eta) \quad (1.95)$$

$$(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R) + (Bi - 1) \sin(\lambda_n R) = 0 \quad (1.96)$$

También aparecen gráficos de Heisler para esas geometrías en todos los libros de transferencia de calor. Para cilindro y esfera los números de Biot y Fourier se definen en base al radio:

$$Bi = \frac{hR}{k}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{R^2}$$

En el caso de un cilindro finito de radio  $R$  y longitud  $2L$ , la distribución adimensional de temperatura se representa como el producto de dos distribuciones adimensionales: una para placa infinita de espesor  $2L$  y otra para cilindro infinito de radio  $R$ .

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \left( \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)_{2L} \left( \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)_{2R} \quad (1.97)$$

#### 1.16.4. Conducción Transiente con Resistencia Térmica Interna Despreciable

Si la resistencia conductiva interna es mucho menor que la convectiva externa, lo que implica que el N° de Biot es bajo, se puede tratar los problemas como si la temperatura interna del sólido fuera uniforme. En estos casos no se puede aplicar la ecuación general del calor, y se debe recurrir a un balance de energía. Suponiendo que la temperatura inicial  $T_0$  es mayor que la del ambiente,  $T_\infty$ : *Energía que sale + Energía que se acumula = 0*. Con lo cual:

$$\rho CV \frac{\partial T}{\partial t} = -hA(T(t) - T_\infty) \quad (1.98)$$

$V$  es el volumen del cuerpo, y  $A$  su área. Por integración de esta ecuación, para los tres sólidos de geometría sencilla, cuyo volumen y área se conocen, se puede demostrar que:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-nBiFo} \quad (1.99)$$

En que  $n=1$  para placa, 2 para cilindro y 3 para esfera.

# Capítulo 2

## 2.1. Intercambio de Calor Entre Dos Fluidos

En el capítulo anterior se vio que el calor transferido de un fluido a otro a través de una pared cilíndrica es:

$$Q_r = \frac{2\pi L(T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{h_2 r_2}} \quad (2.1)$$

Esta ecuación da la base para el diseño de intercambiadores de calor tubulares. Si se define el **coeficiente global de transferencia de calor**,  $U$ , tal que:

$$Q = U A \Delta T \quad (2.2)$$

Existen dos áreas de transferencia posibles: la interna y la externa:

$$A_i = 2\pi r_1 L$$

$$A_e = 2\pi r_2 L$$

Entonces los  $U$  basados en ambas áreas son:

$$\frac{1}{U_e} = \frac{r_2}{h_1 r_1} + \frac{r_2 \ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{h_2} \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_1} + \frac{r_1 \ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{r_1}{h_2 r_2} \quad (2.4)$$

Consideremos un intercambiador simple de tubos concéntricos. Debido al intercambio de calor, las temperaturas de los dos fluidos varían su temperatura a lo largo del intercambiador. Las disposiciones pueden ser:

1. Flujo paralelo o cocrriente (ambos fluidos avanzan en el mismo sentido, disposición mostrada).
2. Flujo contracorriente (fluidos fluyen en sentidos opuestos).

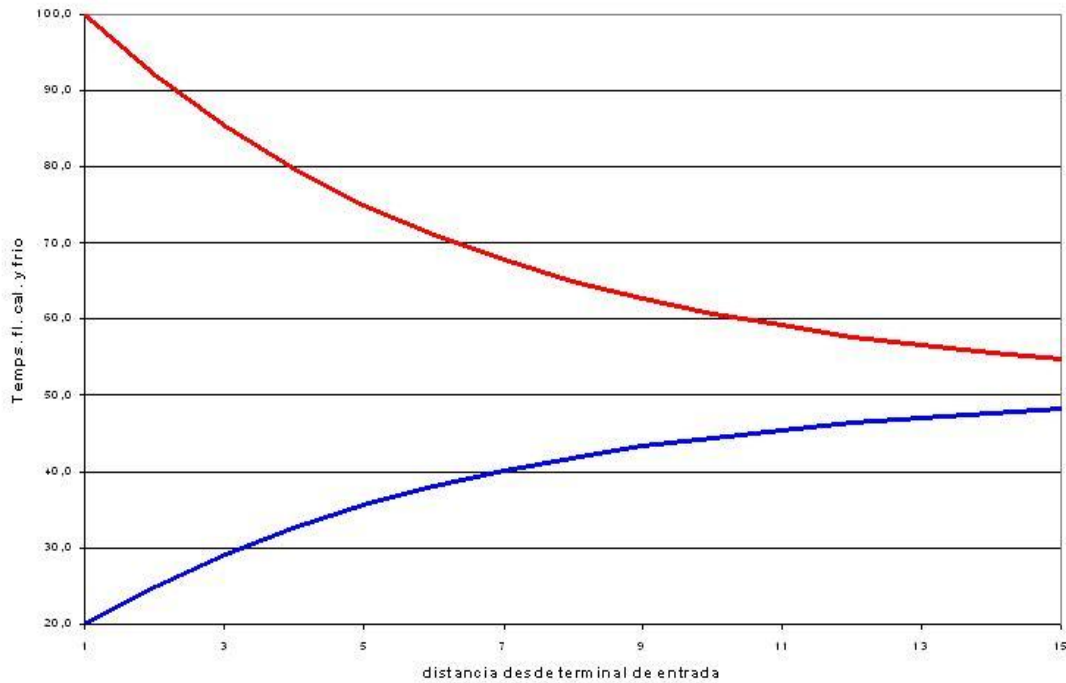


Figura 2.1: Progresión de Temperaturas en Cocorriente

La diferencia de temperatura entre los dos fluidos también varía a lo largo. Por lo tanto, el flujo de calor varía.

## 2.2. Balances Térmicos

Sean  $w$ ,  $c$ ,  $t_e$ ,  $t_s$ , el caudal, calor específico, temperatura de entrada y temperatura de salida para el fluido frío. Los valores correspondientes para el fluido caliente son:  $W$ ,  $C$ ,  $T_e$ ,  $T_s$ . Los balances térmicos expresan el calor transferido del fluido caliente al frío de la siguiente manera:

$$Q = WC(T_e - T_s) = wc(t_s - t_e) \quad (2.5)$$

Suponiendo que no hay cambios de fase, y que no hay intercambios con otros medios. **Las diferencias de temperatura representan el aumento o disminución de temperatura de cada fluido** al pasar por el intercambiador. Además el calor transferido puede expresarse por la ecuación de transferencia:

$$Q = UA\Delta T \quad (2.6)$$

En que  $\Delta T = T - t$ , es la diferencia de temperatura entre los dos fluidos. Pero, como  $\Delta T$  no es uniforme a lo largo del intercambiador, ¿cuál es la diferencia de temperatura representativa?. La respuesta

es: La diferencia media logarítmica de temperatura,  $\Delta T_{log}$ . Si  $\Delta T_1$  y  $\Delta T_2$  son las diferencias de temperatura en los extremos (terminales) del intercambiador, el  $\Delta T_{log}$  se define por:

$$\Delta T_{log} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)} \quad (2.7)$$

Con cambios de fase los balances se escriben en forma diferente. Un líquido saturado se evapora a temperatura constante. Para evaporarse debe recibir calor, por lo tanto es un fluido frío. Un vapor saturado también se condensa a temperatura constante. Como para condensarse entrega calor, se trata de un fluido caliente. Los balances para un fluido evaporándose y uno condensándose se escriben:

$$Q = \lambda_c W = \lambda_e w \quad (2.8)$$

En que  $\lambda$  son los calores latentes de evaporación/condensación. Se puede demostrar que existen límites termodinámicos a la transferencia de calor en un intercambiador cualquiera: supongamos conocidos  $W$ ,  $C$ ,  $T_e$ ,  $w$ ,  $c$ ,  $t_e$ . Entonces, si disponemos de un intercambiador de área suficiente, el fluido que tenga el menor producto

$$Caudal \times CalorEspecifico$$

Se podrá llevar, desde su temperatura de entrada hasta la temperatura de entrada del otro fluido. Ese fluido será el que controla el intercambio. El segundo fluido no se podrá llevar hasta la temperatura de entrada del primero. Entonces, el calor máximo que se puede transferir entre dos fluidos con condiciones de entrada dadas es:

$$Q_{max} = (WC)_{min}(T_e - t_e) \quad (2.9)$$

Se define entonces la "eficiencia" del intercambio como el calor real transferido dividido por el calor máximo que se puede transferir:

$$\epsilon = \frac{Q_{re}}{Q_{max}} = \frac{WC(t_e - T_s)}{(WC)_{min}(T_e - t_e)} = \frac{wc(t_s - T_e)}{(WC)_{min}(T_e - t_e)} \quad (2.10)$$

Se pueden deducir las siguientes expresiones para las eficiencias de los intercambios en cocorriente:

$$\epsilon = \frac{1 - \exp\left(-1 - \frac{C_{min}}{C_{max}}\right) \frac{UA}{C_{min}}}{1 + \frac{C_{min}}{C_{max}}} \quad (2.11)$$

Y en contracorriente:

$$\epsilon = \frac{1 - \exp\left(-1 - \frac{C_{min}}{C_{max}}\right) \frac{UA}{C_{min}}}{1 + \frac{C_{min}}{C_{max}} \exp\left(-1 - \frac{C_{min}}{C_{max}}\right) \frac{UA}{C_{min}}} \quad (2.12)$$

En las ecuaciones anteriores  $C$  representa el producto  $WC$ . Se puede ver que entre los factores de mayor importancia en el cálculo de intercambiadores de calor está el coeficiente global de transferencia,  $U$ .



El factor  $UA/C_{min}$  se designa como "número de unidades de transferencia del intercambiador",  $NUT$ .

$UA$  representa la capacidad de transferencia por grado de diferencia de temperatura entre los fluidos.  $C_{min} = (WC)_{min}$  representa la cantidad de calor que hay que transferir por grado de calentamiento o enfriamiento.  $U$  debe ser conocido para cada aplicación, y se lo determina sobre la base de los conceptos sobre transferencia de calor por convección. La determinación de los coeficientes individuales ( $h$ ) y el coeficiente global ( $U$ ) se abordará en la próxima unidad. El factor  $UA/C_{min}$  se designa como el "número de unidades de transferencia" del intercambiador. Representa el cociente entre la capacidad de transferencia de calor por grado de diferencia de temperatura entre los dos fluidos (representada por  $UA$ ), y la cantidad de calor a transferir por grado de calentamiento o enfriamiento (representada por  $C_{min}$ ).

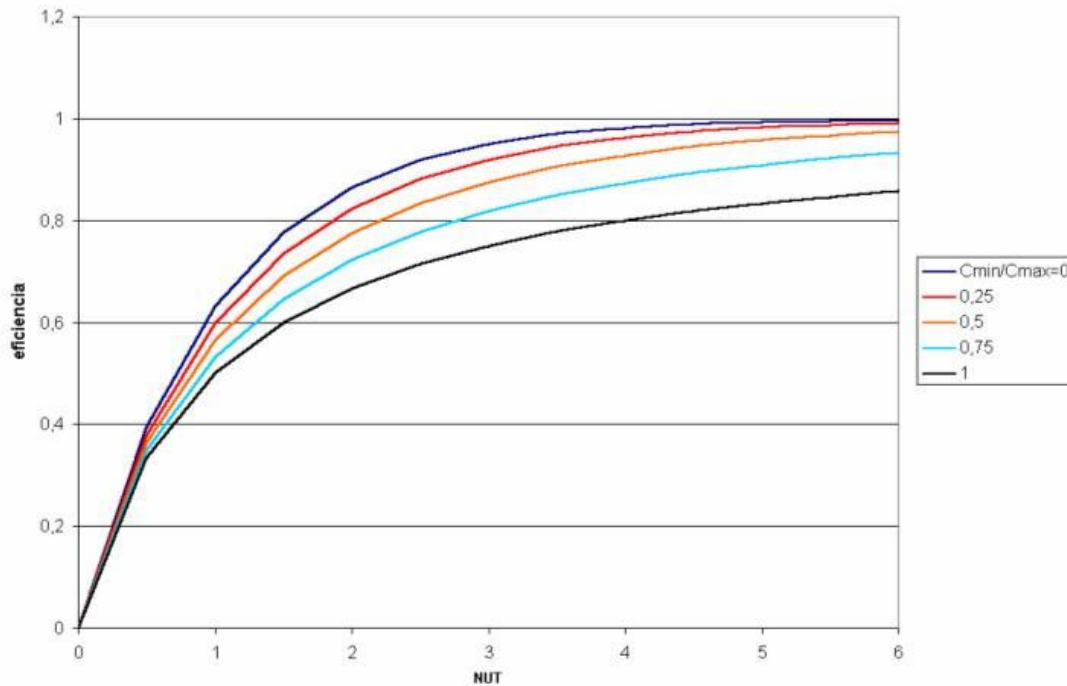


Figura 2.2: Eficiencia de Intercambiadores en Contracorriente

### 2.3. Deducción de la Diferencia de Temperatura Media Logarítmica

Se trata de representar la ecuación de transferencia (que relaciona  $Q$ ,  $U$ ,  $A$ , y  $T$  sobre la base de la diferencia de temperatura representativa para todo el intercambiador. Ecuaciones de transferencia: Para el intercambiador completo:

$$Q = UA\Delta T \quad (2.13)$$

Para una franja  $dA$ :

$$dQ = U dA \Delta T \quad (2.14)$$

Ecuaciones de balance:

$$dQ = WC dT = w c dt \quad (2.15)$$

De donde:

$$dT = \frac{dQ}{WC} \quad (2.16)$$

Y

$$dt = \frac{dQ}{w c} \quad (2.17)$$

Por lo tanto:

$$d(T - t) = dQ \left( \frac{1}{WC} - \frac{1}{wc} \right) = dQ F \quad (2.18)$$

O bien

$$d(\Delta T) = dQ F \quad (2.19)$$

Se integra para todo el intercambiador

$$\Delta T_2 - \Delta T_1 = Q F \quad (2.20)$$

Se toma  $d(\Delta T) = dQ F$  y se divide por

$$\Delta T = \frac{dQ}{U dA} \quad (2.21)$$

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = \frac{dQ F}{\frac{dQ}{U dA}} = F U dA \quad (2.22)$$

Esto se integra para dar:

$$\ln \left( \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right) = F U A \quad (2.23)$$

De donde

$$F = \frac{\ln \left( \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)}{U A} \quad (2.24)$$

Este  $F$  se reemplaza en 2.20 dando, después del despeje:

$$Q = U A \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln (\Delta T_2 / \Delta T_1)} \quad (2.25)$$

Que es la "ecuación de transferencia" o "ecuación de diseño" de un intercambiador. Se llama así porque su uso permite determinar el área del intercambiador.

## 2.4. Convección

Este modo de transferencia de calor se realiza por el movimiento de un fluido. En la conducción pura el calor se transfiere de molécula a molécula. En la convección el movimiento macroscópico del fluido transporta calor que se suma a la conducción. El movimiento implica mezcla, por lo cual un flujo unidireccional no puede considerarse como convectivo. Luego, la convección implica la existencia de dos o más componentes de velocidad.

### 2.4.1. Como Procede la Convección

Una superficie a temperatura  $T_p > T_0$  (ambiente) transferirá calor por conducción directamente a las moléculas de fluido más cercanas (figura 2.3). El campo de flujo de velocidad  $V$ , transporta las moléculas calentadas lejos de la superficie. Esta combinación de conducción y movimiento de fluido es lo que llamamos convección.

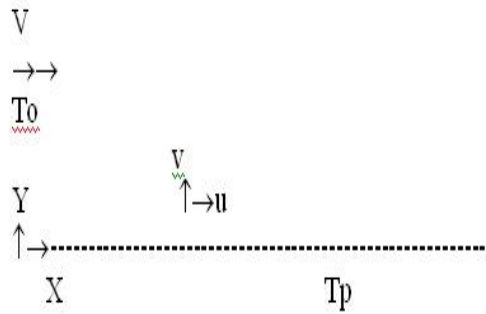


Figura 2.3: Convección

El calor transferido en las direcciones  $x$  e  $y$  se puede representar por las ecuaciones:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_u (T - T_0) \quad (2.26)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} + \rho C_v (T - T_0) \quad (2.27)$$

Se suma a la conducción la componente convectiva del flujo de calor, evaluada con referencia a la temperatura ambiente ( $T_0$ ).  **$k$  es la conductividad del fluido.** La hipótesis de fluido ideal no es útil en transferencia por convección. Para un fluido viscoso, en la superficie habrá siempre una velocidad igual a la de la superficie. Si ésta está en reposo, la velocidad es nula ( $u=v=0$ ). El calor transferido de la superficie al fluido es el flujo de calor superficial normal a la superficie. Se expresa, **por el lado del fluido**, por:

$$q_y = -k \frac{\partial T(y=0)}{\partial y} \quad (2.28)$$

Se puede ahora definir en forma rigurosa el coeficiente convectivo,  $h$ :

$$h = \frac{q_y}{\Delta T} = \frac{-k \frac{\partial T(0)}{\partial y}}{(T_p - T_0)} \quad (2.29)$$

La ecuación anterior expresa que para calcular el coeficiente convectivo, es necesario evaluar:

- el campo de temperatura en el interior del fluido,
- y luego su gradiente normal al nivel de la superficie.

La conductividad térmica usada es la del fluido. Se necesita además conocer la diferencia de temperatura entre la pared y el fluido lejos de ésta. Para conocer el campo de temperatura en un fluido en movimiento es necesario saber cual es el campo de velocidades con que se mueve. El campo de velocidad está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad. Ecuaciones generales en su forma incompresible bidimensional (velocidades  $u$ ,  $v$ , presión  $p$ , temperatura  $T$ ):

1. Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.30)$$

2. Momentum  $x$ :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g_x \quad (2.31)$$

3. Momentum  $y$ :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g_y \quad (2.32)$$

4. Energía térmica:

$$\rho C \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \phi \quad (2.33)$$

En la última ecuación,  $\phi$  es la función "disipación viscosa" que representa el calor generado por el roce interno del fluido.

$$\phi = 2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2.34)$$

En las ecuaciones de movimiento están, de izquierda a derecha, los términos de aceleración (o inercia), el gradiente de presión, los términos viscosos, y las fuerzas en el volumen. En la ecuación de la energía, o ecuación de calor, tenemos los términos convectivos, los términos conductivos y la disipación. El sistema de ecuaciones anterior, con condiciones de borde apropiadas, permite determinar los campos de velocidad y temperatura, y como subproductos, los:

- Coeficientes de fricción (del campo de velocidades).
- Flujos de calor y coeficientes convectivos (a partir del campo de temperatura).

### 2.4.2. Forma Adimensional de las Ecuaciones

Como en Mecánica de Fluidos, la transferencia de calor se puede caracterizar por números o grupos adimensionales. Para encontrar estos números, veremos la forma adimensional de las ecuaciones. Pasos de la adimensionalización:

1. Se eligen magnitudes de referencia para las diferentes variables: para convección forzada. Estas son:
  - $L$ , longitud significativa del cuerpo (para coordenadas)
  - $U_0$ , velocidad del flujo libre o velocidad de gasto (para velocidades)
  - $\rho U_0^2$  (para presiones)
  - $T_p - T_0$  (para temperaturas)
2. Se definen las variables adimensionales en función de las dimensionales y las magnitudes de referencia:  $X = x/L$ ,  $Y = y/L$ ,  $Z = z/L$ ,  $U = u/U_0$ , etc.
3. Se despejan las variables dimensionales de estas definiciones.
4. Se sustituyen las variables dimensionales así expresadas en las ecuaciones diferenciales.
5. Se reducen factores, y las ecuaciones adimensionalizadas con estas magnitudes de referencia, quedan de la siguiente manera, en que se han omitido los términos de fuerzas en el volumen y el término transiente:

a) Continuidad:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.35)$$

b) Momentum  $x$ :

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \left( \frac{1}{Re} \right) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.36)$$

c) Momentum  $y$ :

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \left( \frac{1}{Re} \right) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (2.37)$$

d) Energía térmica:

$$U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \left( \frac{1}{RePr} \right) \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) + \frac{E}{Re} \Phi \quad (2.38)$$

Aparecen los grupos adimensionales:

- $Re = U_0 \rho L / \mu$ , número de Reynolds, razón entre fuerzas de inercia y viscosas, indicativo del régimen de flujo, laminar o turbulento.
- $Pr = \mu C / k = \nu / \alpha$ , número de Prandtl, relaciona las propiedades de transporte de cantidad de movimiento y de calor.
- $E = U_0^2 / C(T_p - T_0)$ , número de Eckert, razón entre energía disipada por roce viscoso, y calor transferido por convección

En la mayoría de las aplicaciones la disipación viscosa es despreciable. En consecuencia, la distribución de temperatura, su gradiente superficial, y el coeficiente convectivo dependerán de los adimensionales  $Re$  y  $Pr$ :

$$h = f(Re, Pr)$$

El coeficiente convectivo  $h$  puede ser adimensionalizado con la dimensión del cuerpo y la conductividad térmica del fluido, definiendo el número de Nusselt,  $Nu$ :

$$Nu = \frac{hL}{k} = f(Re, Pr) \quad (2.39)$$

El número de Nusselt tiene la misma forma que el Biot,  $Bi$ , pero en  $Nu$  la conductividad usada es la del fluido.

### 2.4.3. Flujo Externo: Capa Límite Laminar Sobre Placa Plana

La resolución directa analítica de las ecuaciones de convección es posible en muy pocos casos. El problema siguiente es un caso representativo de flujo externo sobre superficies sólidas. Un flujo viscoso a velocidad y temperatura uniforme ( $U_0, T_0$ ) incide paralelo a una pared sólida de largo  $L$  a temperatura  $T_p > T_0$ . Se generan gradientes de velocidad y temperatura en el fluido en la vecindad de la superficie.

Si el número de Reynolds del flujo ( $U_0 \rho L / \mu$ ) es alto, estos gradientes existen en franjas estrechas adyacentes a la pared, de espesores  $\delta$  y  $\delta_t$ . Estas zonas se denominan "capas límite" dinámica y térmica respectivamente. El pequeño espesor de estas capas implica:  $L \gg \delta$  y  $L \gg \delta_t$ . La superficie impone velocidad axial nula ( $u=0$ ) en la superficie sólida a este flujo de velocidad inicialmente uniforme. Esto causa que parte del fluido migre transversalmente. Se define entonces una componente de velocidad transversal  $v$ , que es de pequeña magnitud frente a  $U_0$ .

Los gradientes  $\partial u / \partial y$  y  $\partial T / \partial y$  son grandes en las capas límite, debido a que la superficie impone diferencias grandes de velocidad y temperatura entre la pared y el flujo libre, y estas diferencias deben resolverse en los pequeños espesores  $\delta$  y  $\delta_t$ . Las diferencias axiales de velocidad y temperatura, en cambio, se desarrollan en longitudes grandes ( $L \gg \delta$  y  $L \gg \delta_t$ ), con lo cual los gradientes  $\partial u / \partial x$  y  $\partial T / \partial x$  son extremadamente pequeños respecto a  $\partial u / \partial y$  y  $\partial T / \partial y$  respectivamente. De las consideraciones anteriores se desprende que los términos de inercia no pueden despreciarse, y tampoco los términos convectivos.

La ecuación de movimiento en  $v$  aplicada fuera que la capa límite indica que  $(\partial p / \partial y) = 0$  en esa zona, debido a que en ella la velocidad  $v$  es nula. Dado que la placa genera velocidades transversales  $v$  muy pequeñas, el gradiente de presión normal a la superficie ( $\partial p / \partial y$ ) dentro de la capa límite es despreciable, y se considera también nulo. Esto conduce a que el gradiente axial de presión ( $\partial p / \partial x$ ) sea el único significativo, y es impuesto por el flujo externo. En las condiciones de flujo libre, sin embargo, en que el flujo se mueve sin inercia ni roce viscoso,  $\partial p / \partial x$  debe ser forzosamente cero, condición que se extiende al interior de la

capa límite. Con todas estas consideraciones, las ecuaciones de capa límite en régimen permanente se pueden escribir:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.40)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.41)$$

Con  $\alpha = k/(\rho C)$  y  $\nu = \mu/\rho$ . Las condiciones de borde son:

- $u=v=0, T=T_p$  en  $y=0$ ,
- $\frac{\partial u}{\partial y}=0$  y  $\frac{\partial u}{\partial y}$  en  $y \rightarrow \infty$ .
- $u=U_0$  y  $T=T_0$  en  $x=0$ .

Dado que en estas ecuaciones no existen segundas derivadas en la dirección  $x$ , los campos de velocidad y temperatura dependen de las condiciones aguas arriba ( $x=0$ ), y no existen condiciones de borde de salida para la placa. A estas ecuaciones se agrega la de continuidad, con lo cual el sistema es capaz de entregar las dos componentes de velocidad y la temperatura:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.42)$$

Las condiciones en el infinito pueden expresarse también en términos de los espesores, es decir:

- $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ , en  $y=\delta$
- $\frac{\partial T}{\partial y}=0$ , en  $y=\delta_t$

Se resolverá el problema de capa límite laminar sobre placa plana, para determinar las distribuciones de velocidad y de temperatura, y el flujo de calor desde la placa al fluido. Se utilizará el método integral. Este método es el de mayor simplicidad y entrega soluciones bastante aproximadas a las obtenidas por el método exacto ("método de similitud"). Se considera propiedades físicas constantes, no dependientes de la temperatura. Esto permite resolver el problema dinámico independiente del problema térmico. Pasos del método integral. Problema dinámico:

1. Se expresa el perfil de velocidad en la C.L. mediante un polinomio en  $y$ :

$$u(x, y) = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 \quad (2.43)$$

En que los coeficientes son funciones de  $x$ . El carácter aproximado del método se debe a expresar el perfil con solo 4 términos. Aplicando las condiciones se obtienen esos coeficientes:  $u=0$  en  $y=0$  implica  $C_0=0$ . Por otra parte,  $\partial u/\partial y=0$  en  $y=\delta$  implica:

$$0 = C_1 + 2C_2\delta + 3C_3\delta^2 \quad (2.44)$$

En  $y=\delta$ , la velocidad en la capa límite alcanza el valor correspondiente al flujo libre:

$$U_0 = C_1\delta + C_2\delta^2 + C_3\delta^3 \quad (2.45)$$

Se necesita una condición más. Esta se obtiene aplicando la ecuación de movimiento en  $y=0$ , en que  $u=v=0$ .

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2C_2\delta^2 + 6C_3 \cdot 0 \quad (2.46)$$

Lo que implica que  $C_2=0$ . Despejando las constantes se obtiene el perfil de velocidad siguiente:

$$\frac{u(x, y)}{U_0} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (2.47)$$

2. Se obtiene la ecuación integral de cantidad de movimiento integrando la ecuación diferencial de movimiento según  $x$  respecto a  $y$  entre  $y=0$  e  $y=\delta$ :

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta (U_0 - u)u dy = v \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (2.48)$$

La obtención de esta ecuación se verá aparte. Substituyendo el perfil de velocidad en la ecuación integral de la energía se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{39}{280} (U_0^2 \delta) \right) = \frac{3}{2} \frac{v U_0}{\delta} \quad (2.49)$$

La cual es una ecuación diferencial para el espesor  $\delta$ . Si se resuelve la ecuación considerando  $\delta=0$  en  $x=0$ , se obtiene:

$$\delta = 4,64 \left( \frac{vx}{U_0} \right)^{0,5} = 4,64x Re_x^{-0,5} \quad (2.50)$$

Donde  $Re_x = U_0 x / \nu$ . Se observa que el espesor crece con  $\sqrt{x}$  y decrece con aumentos de  $U_0$ . Es decir, la capa límite dinámica es más delgada, o se "adhiera más" a la superficie a mayores velocidades.

Es importante notar que el parámetro de flujo (o de régimen) en este caso es  $Re_x$ , el número de Reynolds local, que tiene un valor para cada posición axial. Por lo tanto, se trata de un flujo en desarrollo a lo largo de la dirección  $x$ , cuyas características se modifican continuamente a medida que se avanza según  $x$ . Cuando  $Re_x$  llega a las cercanías de  $5 \times 10^5$ , aparecen inestabilidades que causan la aparición de la turbulencia. El esfuerzo de corte al nivel de la pared,  $\tau_p$ , se calcula como:

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3\mu U_0}{2\delta} \quad (2.51)$$

Y el coeficiente de fricción,  $C_f$ :

$$C_f = \frac{\tau_p}{0,5\rho U_0^2} = 0,646 Re_x^{-0,5} \quad (2.52)$$

Este coeficiente de fricción disminuye con aumentos de  $x$ , lo que se explica por que el gradiente de velocidad en la pared disminuye al aumentar el espesor de la capa límite.



### 2.4.4. Capa Límite Térmica

En la situación descrita, aplicaremos el método integral para encontrar

- la distribución de temperatura y
- el flujo de calor desde la placa a temperatura  $T_p$  hasta el flujo a  $T_0$ .

La ecuación de la energía para la capa límite térmica en términos de una temperatura adimensional es:

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \quad (2.53)$$

En que

$$\Theta = \frac{T - T_p}{T_0 - T_p}$$

es la temperatura adimensional, que toma valores de 0 en la pared y de 1 en  $y=\delta_t$ . Se supone un perfil de temperatura de la forma:

$$\Theta(x, y) = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 \quad (2.54)$$

En que los  $C$  son funciones de  $x$ . Con las condiciones:

- $\Theta=0$  en  $y=0$
- $\Theta=1$  en  $y=\delta_t$
- $\partial\Theta/\partial y=0$  en  $y=\delta_t$
- $\partial^2\Theta/\partial y^2=0$  en  $y=0$

Se obtiene el perfil:

$$\Theta(x, y) = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta_t} \right)^3 \quad (2.55)$$

Ahora, para encontrar el espesor en función de  $x$ , es necesario integrar la ecuación de la energía sobre el espesor de la capa límite térmica. Como que se hizo con la ecuación integral de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (1 - \Theta) u dy = \alpha \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (2.56)$$

En esta ecuación se reemplazan los perfiles de velocidad y temperatura, y se realiza la integral. Para hacerlo es necesario considerar dos hipótesis:

1. La primera, consiste en suponer que la temperatura de la placa es  $T_p$  desde una posición  $x=x_0 > 0$ , siendo  $T_0$  para  $x < x_0$ . Sin esta suposición no se puede integrar la ecuación.
2. La segunda suposición, es que el espesor de la C.L. térmica es menor que el de la dinámica. ( $\delta_t < \delta$ ).

Definiendo  $\Delta = \delta_t / \delta$ , (razón entre los espesores) y haciendo la integración, se obtendrá una ecuación diferencial para la razón entre los espesores:

$$U_0 \frac{d}{dx} \left[ \delta \left( \frac{3}{20} \Delta^2 - \frac{3}{280} \Delta^4 \right) \right] = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\Delta \delta} \quad (2.57)$$

Como  $\Delta < 1$  y  $3/280 < 3/20$ , se descarta el término de cuarto grado frente al de segundo. Esto permite resolver la ecuación para  $\Delta$ . Si se diferencia la ecuación simplificada, se obtiene:

$$\frac{U_0}{10} \left( 2\delta^2 \Delta^2 \frac{d\Delta}{dx} + \Delta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} \right) = \alpha \quad (2.58)$$

De la solución para  $\delta$  (obtenida anteriormente) se tiene, para los factores que aparecen en la ecuación anterior:

$$\delta d\delta = \frac{140}{13} \frac{\nu}{U_0} dx \quad (2.59)$$

Y

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_0} \quad (2.60)$$

Haciendo los reemplazos la ecuación diferencial queda:

$$\Delta^3 + 4\Delta^2 \frac{d\Delta}{dx} = \frac{13}{14} \frac{\alpha}{\nu} \quad (2.61)$$

Que tiene como solución:

$$\Delta^3 = C_x^{-3/4} + \frac{13}{14} \frac{\alpha}{\nu} \quad (2.62)$$

Con espesor térmico nulo en  $x=0$ , se obtiene la solución (considerando que  $Pr = \nu/\alpha$ , número de Prandtl):

$$\Delta = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1,026} Pr^{-1/3} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3} \quad (2.63)$$

Para  $x_0$ :

$$\delta_t = 0,975 Pr^{-1/3} \quad (2.64)$$

Se observa que la razón de los espesores depende sólo del número de Prandtl del fluido.  $A > Pr$ , menor es el espesor de la capa límite térmica, ya que  $d$  no depende de  $Pr$ . El coeficiente convectivo se obtiene de su definición, combinada con el perfil de temperatura:

$$h_x = \frac{-k \left( \frac{\partial T}{\partial Y} \right)_{y=0}}{T_p - T_0} = \frac{3}{2} \frac{k}{\delta_t} = 0,332 k Pr^{1/3} \left( \frac{U_0}{\nu x} \right)^{1/2} \quad (2.65)$$

Adimensionalizando  $h_x$  obtenemos el N° de Nusselt local:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0,332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (2.66)$$

Esta ecuación expresa en forma adimensional la transferencia de calor local de la placa al fluido. El número de Nusselt es la forma adimensional del coeficiente convectivo. Existe un valor de  $Nu$ ,  $h$  y  $q$  para cada valor de  $x$ . Los valores medios de  $h$  y  $Nu$  para una longitud  $L$  son:

$$\bar{h} = 0,664 \frac{k}{L} Pr^{1/3} \left( \frac{U_0 L}{\nu} \right)^{1/2} \quad (2.67)$$

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = 0,664 Pr^{1/3} Re_L^{1/2} \quad (2.68)$$

El análisis anterior es válido para capas límite laminares. La capa límite comenzará siempre laminar desde el borde  $x=0$  (borde de ataque). El desarrollo de los perfiles de velocidad causa un aumento progresivo del espesor de la capa límite dinámica, lo que implica que los gradientes de velocidad disminuyen al aumentar  $x$ . Disminuyen entonces las fuerzas viscosas en la capa y pasan a dominar las de inercia. Esto causa inestabilidades que llevan a régimen turbulento, lo que ocurre en la posición  $x$  tal que  $Re_x = 5 \times 10^5$ .

**Ejemplo:** Supongamos que se tiene una placa plana a  $T_p=50^\circ\text{C}$ . Sobre ella cual pasa un flujo paralelo con  $T_0=0^\circ\text{C}$ ,  $U_0=2\text{ m/s}$ . El fluido es aire, para el cual las propiedades físicas son:  $\rho=1.17\text{ kg/m}^3$ ,  $C=1005\text{ J/kgK}$ ,  $k=0,026\text{ W/mK}$ ,  $\mu=1.85 \times 10^{-5}\text{ kg/ms}$ . Queremos determinar el flujo local de calor a 0.5 metros del borde de ataque: Primero obtenemos los grupos adimensionales independientes:

$$Pr = \frac{\mu C}{k} = 0,715$$

$$Re_x = \frac{U_0 \rho x}{\mu} = 46200$$

Luego usamos la ecuación que nos da el grupo adimensional de transferencia de calor (Número de Nusselt) en función de los grupos adimensionales independientes:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0,332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} = 6,151$$

A continuación obtenemos las magnitudes dimensionales de transferencia de calor,  $h$  y  $q$ :

$$h_x = \frac{Nu_x k}{x} = 0,32\text{ W/m}^2\text{K}$$

$$q_x = h_x (T_p - T_0) = 15,994\text{ W/m}^2$$

Las ecuaciones 2.66 y 2.68 tienen la forma de las ecuaciones o correlaciones de origen experimental que se usan para evaluar los coeficientes convectivos en diversas situaciones. El ejemplo mostrado ilustra el uso de estas correlaciones en la evaluación de flujos de calor en problemas convectivos. El cálculo procede según el siguiente esquema:

- Identificación de la geometría y los datos.
- Cálculo de los grupos adimensionales independientes relevantes
- Cálculo de Nusselt mediante la expresión obtenida para el problema.
- Desadimensionalización del Nusselt, para obtener  $h$  y  $q$ .

Junto con este apunte se envía un archivo excel (planilla con tres gráficos) que ilustra diversas características de la capa límite en un caso particular. Modificando los datos básicos, usted puede estudiar la sensibilidad de los espesores y número de Nusselt ante cambios en  $U_0$ , en temperaturas y en las propiedades físicas.

## 2.5. Convección Forzada Interna: Tubos o Canales

Cuando un flujo de velocidad uniforme  $V$  y temperatura  $T_e$  ingresa en un tubo o canal rectangular, se generan capas límite de velocidad y temperatura en las paredes. Al juntarse las capas límite en el eje del tubo, se producen los regímenes dinámicamente establecido y térmicamente establecido. Veamos el problema dinámico. Flujo incompresible de propiedades constantes. En la región de régimen dinámicamente establecido, la componente radial de la velocidad ( $v$ ) es cero. Por lo tanto, la ecuación de continuidad implica  $\partial u / \partial z = 0$ . Los términos de inercia se anulan, quedando sólo los términos viscosos y el gradiente de presión:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (2.69)$$

La velocidad  $u$  es nula en  $r=R$  y su derivada es nula en  $r=0$  (máxima velocidad en el eje). Si el gradiente de presión es constante, se obtiene el conocido perfil parabólico del régimen de Poiseuille:

$$u(r) = - \left( \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \right) R^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.70)$$

La velocidad media o de gasto,  $V$ , se evalúa como:

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u(r) dr = - \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad (2.71)$$

Con lo cual:

$$\frac{u(r)}{V} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.72)$$

El factor de fricción,  $\Lambda$ , se define como:

$$\Lambda = \frac{dp/dz}{(\frac{1}{2}\rho V^2)/D} = 64 \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{64}{Re} \quad (2.73)$$

El cual permite predecir la pérdida de presión para una velocidad media dada:

$$\Delta P = \frac{(\Lambda/2)V^2 \rho L}{D} \quad (2.74)$$

Veamos ahora la distribución de temperatura en la zona de régimen *dinámicamente* establecido ( $v=0$ ). Esta responde a la ecuación siguiente. El término convectivo axial no puede eliminarse, porque hay una transferencia convectiva de calor en esa dirección. También hay conducción, especialmente radial. Si no hay disipación viscosa, la ecuación de la energía se escribe:

$$\frac{u(r)}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.75)$$

Para encontrar la distribución de temperatura, debemos definir las condiciones de borde en la superficie interna del tubo. Se usan las condiciones de temperatura de pared uniforme o de flujo de calor uniforme. Se elegirá esta última por su mayor simplicidad. Para evaluar la transferencia de calor necesitamos una diferencia de temperatura apropiada. Como la temperatura va aumentando axialmente, necesitamos una temperatura media del flujo  $T_m(z)$  en cada posición axial. La diferencia de temperatura que causa el flujo de calor es, entonces,  $T_p(z) - T_m(z)$ . Definición de  $T_m$ :

$$T_m(z) = \frac{\int_0^R T(r, z) u(r) 2\pi r dr}{\int_0^R u(r) 2\pi r dr} \quad (2.76)$$

Esta representa la temperatura "de mezcla" del fluido en una sección  $z$ . Ahora, con la condición de flujo uniforme  $q_0$  en la pared, se puede demostrar que  $T_m$  crece linealmente con  $z$ . Esto se obtiene del siguiente balance de calor:

$$q_0 \pi D z = WC(T_m(z) - T_e) \quad (2.77)$$

Después de una zona de entrada, la temperatura de pared también crece linealmente con  $z$ . Esto se deriva de:

1. El flujo es uniforme según  $z$ .
2. El perfil de velocidades es el mismo en dos estaciones separadas por una cierta distancia según  $z$ .

Para que se cumpla 1, teniendo en cuenta 2, es necesario que la pared aumente su temperatura a la misma tasa que la media, es decir, las curvas de  $T_p$  y  $T_m$  vs. son paralelas. Ahora, si  $dT_p/dz$  y  $dT_m/dz$  son iguales, también serán iguales a  $dT/dz$ , la derivada axial de temperatura en cualquier posición radial. Por lo tanto, la derivada de temperatura en el término convectivo es constante y se obtiene una ecuación diferencial ordinaria. Se suprime también el término conductivo axial. Esta ecuación es:

$$\frac{u(r)}{\alpha} \frac{dT_m}{dz} = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \quad (2.78)$$

Reemplazando el perfil de velocidad y arreglando, se obtiene:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = Ar \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.79)$$

Con:

$$A = \frac{2V}{\alpha} \frac{dT_m}{dz} = cte \quad (2.80)$$

Las condiciones son:

- $dT/dr=0$  en  $r=0$  y
- $T=T_p(z)$  en  $r=R$ .

Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$T_m(z) - T_p(z) = -\frac{11}{48} \frac{AR^2}{2} \quad (2.81)$$

Dado que el flujo de calor en la pared es  $kdT(R)/dr$  y  $dT(R)/dr = AR/4$ , resulta:

$$h = \frac{q}{T_p - T_m} = \frac{kAR/4}{\frac{11}{48} \frac{AR^2}{2}} \quad (2.82)$$

$$h = \frac{48}{11} \frac{k}{D} \quad (2.83)$$

De donde:

$$Nu = \frac{hD}{k} = \frac{48}{11} = 4,364 \quad (2.84)$$

Entonces, el número de Nusselt en un tubo en régimen laminar establecido no depende de  $Re$  ni de  $Pr$ . ¿Desmiente esto nuestra conclusión anterior de que  $Nu=f(Re, Pr)$ ? No, porque en este caso no hay condiciones realmente convectivas ( $v=0$ ). A diferencia del caso de capa límite, ahora tenemos **convección axial**, pero solo **conducción radial**. El perfil de Nusselt en un caso similar ( $T_p$  cte) se muestra en la Figura:

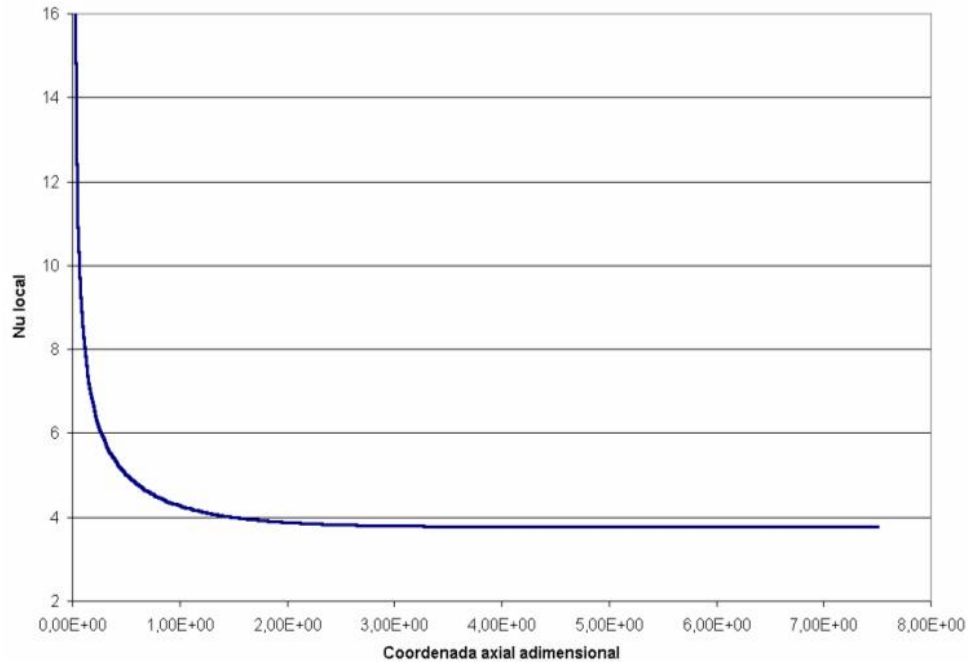


Figura 2.4: Variación Axial de Nusselt a  $T_p$  Uniforme

### 2.5.1. Flujo en Tubos o Canales

Se acaba de concluir que, para regiones alejadas de la entrada, en un tubo con flujo laminar, y flujo de calor uniforme en la pared, el número de Nusselt basado en el diámetro es constante e igual a 4.364. Similar resultado se obtiene con temperatura de pared uniforme, en cuyo caso  $Nu=3.66$ . En ambos casos, a la entrada las condiciones son similares a las de capa límite, es decir, términos de inercia y convectivos significativos. En la región de entrada, el número de Nusselt dependerá, por lo tanto, de los números de Reynolds y Prandtl. En una capa límite, el coeficiente convectivo local decrecía desde el borde de ataque.

Esto ocurre también a la entrada de un tubo. Adimensionalizando este  $h$  decreciente con una longitud fija (el diámetro  $D$ ), el número de Nusselt resultante ( $Nu_D = hD/k$ ) en un gráfico de  $Nu_D$  versus  $z$ , presenta una zona decreciente y luego una zona de valor constante. Se han obtenido expresiones empíricas para la longitud de entrada, que son del tipo:

$$\frac{z}{R} = 0,1 Re Pr \quad (2.85)$$

Por lo tanto, a mayor número de Prandtl más se retarda la aparición de la zona de número de Nusselt uniforme.  $Pr$  tiene valores del orden de 0.05 para metales líquidos, 0.71 para aire, 1.3-1.75 para agua, y de centenas y miles para productos orgánicos livianos y pesados respectivamente. El aumento en la longitud de la zona de entrada se relaciona con la disminución del espesor de capa límite térmica que ocurre al aumentar el  $Pr$ . Para fines prácticos, interesa obtener un valor medio del número de Nusselt, el cual se definirá como:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_0^L Nu dz \quad (2.86)$$

En que  $L$  es la longitud del tubo. Como  $Nu$  local depende (en general) de  $Re$  y  $Pr$ , el promedio dependerá de estos parámetros, y además de  $L$ . En términos adimensionales,

$$\overline{Nu} = f(Re, Pr, D/l)$$

Como resulta difícil obtener una solución analítica de las ecuaciones en la región de entrada, la dependencia anterior ha sido llevada a fórmula algebraica concreta mediante datos experimentales. La correlación más importante ha sido propuesta por *Sieder y Tate* (1936):

$$\overline{Nu} = 1,86 \left( \frac{GD}{\mu} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu C}{k} \right)^{1/3} \left( \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad (2.87)$$

$G$  es la "velocidad másica"  $= V\rho$ . En la formulación y uso de esta ecuación se debe especificar la temperatura a la cual se evalúan las propiedades físicas (que varían con  $T$ ). Hay variación axial y radial de las propiedades.

La variación axial se tiene en cuenta evaluando las propiedades a  $T_m = (T_e + T_s)/2$ . La variación radial, de menor magnitud, tendrá efecto sólo sobre propiedades muy sensibles a  $T$ , como la viscosidad. El último factor (corrección por viscosidad variable) contiene el cociente entre la viscosidad evaluada a  $T_m$  y la viscosidad evaluada a  $T_p$ . En ecuaciones como la anterior, los factores de mayor exponente son más influyentes.

La parte correspondiente a flujo laminar ( $Re$  hasta 2100) corresponde a la ecuación anterior. Sigue una región de transición (hasta  $Re=10000$ ) en que la dependencia de  $Nu$  con  $D/L$  va disminuyendo gradualmente. Para  $Re > 10000$ , se tiene la parte turbulenta, en que  $Nu$  es independiente de  $D/L$ . En esa zona, la correlación toma la forma:

$$\overline{Nu} = 0,027 \left( \frac{GD}{\mu} \right)^{0,8} \left( \frac{\mu C}{k} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad (2.88)$$

En régimen turbulento, hay una intensa mezcla transversal (torbellinos) prácticamente desde la entrada. Por lo tanto, la zona de entrada es muy corta. No influye entonces la razón  $D/L$ . El exponente de  $Re$  se eleva a 0.8, pasando a ser  $Re$  el principal factor independiente. En 1933, *Dittus* y *Boelter* habían formulado la siguiente correlación para flujo turbulento en tubos:

$$\overline{Nu} = 0,023 \left( \frac{GD}{\mu} \right)^{0,8} \left( \frac{\mu C}{k} \right)^n \quad (2.89)$$

En que  $n=1/3$  para enfriamiento y 0.4 para calentamiento. Esta ecuación, obtenida con fluidos de  $Pr$  hasta 100 aproximadamente, se usa cuando la viscosidad es baja y su variación es pequeña (pequeñas diferencias de temperatura pared-fluido).

Veremos algunos ejemplos del uso de estas correlaciones. Calentamiento de un fluido de caudal  $W$ , temperatura de entrada  $T_e$  en régimen laminar en un tubo de largo  $L$  y diámetro  $D$  con temperatura interna de pared uniforme,  $T_p$ . Determinar la temperatura de salida. En este caso necesitamos una diferencia media de temperatura entre pared y fluido. Usamos la diferencia media logarítmica: El balance de energía y la ecuación de transferencia:

$$Q = WC(T_s - T_e) = hA\Delta T_{ln} = hA \left[ \frac{(T_p - T_e) - (T_p - T_s)}{\ln(T_p - T_e)/(T_p - T_s)} \right] \quad (2.90)$$

Reduciendo términos en la última expresión, se encuentra:

$$\ln(T_p - T_e)/(T_p - T_s) = e^{hA/WC} \quad (2.91)$$

De donde se obtiene:

$$T_s - T_e = (T_p - T_e) \left[ 1 - e^{hA/WC} \right] \quad (2.92)$$

Luego, si el área de transferencia es nula,  $T_s=T_e$ . Si el área es  $\infty$ ,  $T_s=T_p$ . Conocidas las condiciones de entrada, propiedades y área, el problema se reduce a determinar  $h$ , lo cual se logra mediante una correlación apropiada. Similar razonamiento se puede hacer para el caso de flujo externo cruzado o perpendicular al eje de un tubo que conduce otro fluido. En este caso, se reemplaza  $h$  por el coeficiente global de transferencia de calor.

## 2.6. Otros Casos de Convección Forzada

Para diseñar dispositivos de transferencia de calor por convección es necesario disponer de una base de información sobre coeficientes convectivos. Esta está generalmente contenida en correlaciones de origen experimental. Las correlaciones están basadas en las dependencias básicas entre grupos adimensionales. El uso de las correlaciones requiere conocer propiedades físicas de los fluidos y su variación con la temperatura. En general, en un problema dado aparecerá más de un coeficiente convectivo a evaluar. Se debe determinar entonces un coeficiente global de transferencia de calor.



Factores a identificar en cada problema:

- Geometría (dimensión significativa para  $Re$  y  $Nu$ ).
- Flujo interno o externo.
- Régimen de flujo (laminar o turbulento)
- Condiciones de borde térmicas ( $T_p$  uniforme,  $q_0$  uniforme o ninguna de las 2 variables uniforme).
- Propiedades físicas ( $C$ ,  $\mu$ ,  $k$  y eventualmente  $\rho$ ).
- Diferencia de temperatura significativa ( $\Delta T$ ).

Herramientas:

- Correlaciones adimensionales para  $h$  (o  $Nu$ ).
- Balances térmicos.
- Aproximaciones iterativas.
- Tablas de datos de propiedades.

Se hará una breve discusión de las situaciones más comunes en la práctica.

### 2.6.1. Convección Forzada en el Interior de Tubos

Generalmente se toman como base las ecuaciones de *Sieder Tate* (1936) para régimen laminar y turbulento. Estas están afectas a errores de  $\pm 20\%$ . Otra correlación, con errores de  $\pm 10\%$  ha sido propuesta por *Petukhov* (1963). Se aplica sólo a flujo turbulento ( $Re > 10^5$ ).

$$\overline{Nu} = \frac{(f/8)RePr}{1,07 + 12,7(f/8)^{0,5}(Pr^{0,66} - 1)} \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad (2.93)$$

En que

$$f = (1,82 \log_{10} Re - 1,64)^{-2} \quad (2.94)$$

Todas las ecuaciones anteriores se aplican a tubos lisos. La influencia de la rugosidad sobre la transferencia de calor en tubos rugosos no está suficientemente documentada. Sin embargo, reconociendo que la rugosidad incrementará la transferencia de calor, el cálculo de  $Nu$  suponiendo que se da la condición de tubo liso es una medida conservativa.

### 2.6.2. Canales de Sección no Circular

Las ecuaciones para flujo interno se aplican a estos casos. Para definir  $Re$  y  $Nu$  se usa un diámetro equivalente,  $D_e$ . El Diámetro equivalente se define como:

$$D_e = \frac{4A}{P} \quad (2.95)$$

En que  $A$  es el área de flujo (sección transversal del ducto) y  $P$  es el *perímetro de transferencia de calor*. Para un tubo, el  $D_e = D$ . Para un canal de sección cuadrada,  $D_e = \text{lado del cuadrado}$ . El concepto de  $D_e$  es muy útil para cálculos en intercambiadores compactos.

Para el espacio entre dos tubos concéntricos (intercambiador de doble tubo) tenemos 4 diámetros:  $D_{ee}$ ,  $D_{ie}$  (diámetros exterior e interior del tubo exterior),  $D_{ei}$  y  $D_{ii}$  (exterior e interior del tubo interior). Entonces,

$$D_e = \frac{D_{ie}^2 - D_{ie}^2}{4D_{ei}} \quad (2.96)$$

En este caso la pérdida de carga se calcula en base a un  $Re$  basado en el Diámetro Hidráulico, en que  $P$  es el *perímetro mojado*. Un ejemplo mostrará el cálculo de un intercambiador de tubos concéntricos, con flujo turbulento.

### 2.6.3. Flujo en el Exterior de Tubos

Los casos más importantes corresponden a flujo perpendicular al eje de un tubo (flujo cruzado).  $T_s$ ,  $T_e$ : temperaturas de entrada y salida del fluido interior.  $T_e$ : temperatura del flujo externo. La temperatura del flujo externo es la misma a ambos extremos del tubo que conduce al fluido interior. Este tiene un caudal  $W$ . Por lo tanto, el balance de energía y la ecuación de transferencia son:

$$Q = WC(T_s - T_e) = UA\Delta T_{ln} = UA \left[ \frac{(T - T_e) - (T - T_s)}{\ln(T - T_e)/(T - T_s)} \right] \quad (2.97)$$

De donde se deduce que:

$$T_s - T_e = (T - T_e) \left[ 1 - e^{-UA/WC} \right] \quad (2.98)$$

Luego,  $T_s$  se aproxima a  $T$  a medida que aumenta el área. El coeficiente global de transferencia basado en el área externa es:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_e} + \frac{r_e \ln(r_e/r_i)}{k} + \frac{r_e}{r_i h_i} \quad (2.99)$$

**Correlaciones para  $h_e$ :** Dada la naturaleza complicada del proceso de flujo alrededor del un cilindro en flujo cruzado, no hay soluciones analíticas de este caso. Los resultados experimentales de transferencia de calor se han expresado mediante correlaciones empíricas en función de  $Re$  y  $Pr$ . Las más simples son de la forma:

$$\frac{hD}{k} = C \left( \frac{U_0 D}{\nu} \right)^n Pr^{1/3} \quad (2.100)$$

(Knudsen y Katz, 1958).  $C$  y  $n$  se tabulan de la siguiente manera:

| $Re$         | $C$    | $n$   |
|--------------|--------|-------|
| 0.4-4        | 0.989  | 0.33  |
| 4-40         | 0.911  | 0.385 |
| 40-4000      | 0.683  | 0.466 |
| 4000-40000   | 0.193  | 0.618 |
| 40000-400000 | 0.0266 | 0.805 |

El conjunto de datos experimentales para  $Re$  entre  $10^2$  y  $10^7$  ha sido correlacionado por *Churchill* y *Bernstein* (1977) en una sola ecuación, de la forma:

$$Nu = 0,3 + \frac{0,62Re^{0,5}Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{3/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \quad (2.101)$$

Las propiedades se evalúan a la temperatura media entre la pared y el flujo libre.

#### 2.6.4. Hazes de Tubos en Flujo Cruzado

Como se vio en un ejemplo, los intercambiadores de gran área deben contener varios tubos formando un haz a fin de proporcionar un área de transferencia grande en un espacio reducido. Se tienen dos disposiciones posibles para los tubos de un haz: en línea y alternados. Para ambos casos se definen los espaciados  $S_p$  (paralelo al flujo) y  $S_n$  (normal al flujo). Se adopta una correlación simple, de la forma de la de *Knudsen* y *Katz*, pero los coeficientes  $C$  y  $n$  dependen del arreglo. La dependencia se resume en la siguiente tabla (para 10 filas o más):

| Sp/D       |       |       |       | Sn/D  |       |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|            | 1.25  |       | 1.5   |       | 2     |       | 3     |       |
|            | C     | n     | C     | n     | C     | n     | C     | n     |
| En línea   |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 1.25       | 0.386 | 0.592 | 0.305 | 0.608 | 0.111 | 0.704 | 0.07  | 0.752 |
| 1.5        | 0.407 | 0.586 | 0.278 | 0.62  | 0.112 | 0.702 | 0.075 | 0.744 |
| 2          | 0.464 | 0.57  | 0.332 | 0.602 | 0.254 | 0.632 | 0.22  | 0.648 |
| 3          | 0.322 | 0.601 | 0.396 | 0.584 | 0.415 | 0.581 | 0.317 | 0.608 |
| Alternados |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 0.9        |       |       |       |       | 0.495 | 0.571 | 0.445 | 0.581 |
| 1          |       |       | 0.552 | 0.558 |       |       |       |       |
| 1.25       | 0.575 | 0.556 | 0.561 | 0.554 | 0.576 | 0.556 | 0.579 | 0.562 |
| 1.5        | 0.501 | 0.568 | 0.511 | 0.562 | 0.502 | 0.568 | 0.542 | 0.568 |
| 2          | 0.448 | 0.572 | 0.462 | 0.568 | 0.535 | 0.556 | 0.498 | 0.57  |
| 3          | 0.344 | 0.592 | 0.395 | 0.58  | 0.488 | 0.562 | 0.467 | 0.574 |

Para un número de filas menor que 10, se multiplican los coeficientes obtenidos por la tabla anterior, por los factores de la siguiente tabla:  $hN/h10$ .

| N    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| E.I. | 0.68 | 0.75 | 0.83 | 0.89 | 0.92 | 0.95 | 0.97 | 0.98 | 0.99 | 1  |
| Alt  | 0.64 | 0.8  | 0.87 | 0.9  | 0.92 | 0.94 | 0.96 | 0.98 | 0.99 | 1  |

### 2.6.5. Intercambiadores de Carcasa y Tubos

Están formados por un haz de tubos que conduce uno de los fluidos y una carcasa o envolvente (usualmente cilíndrica) por la cual circula el segundo fluido. Estos intercambiadores se pueden usar para prácticamente cualquier intercambio entre dos fluidos, incluyendo aquellos con cambio de fase. En láminas se presentan las configuraciones geométricas de los intercambiadores de carcasa y tubo más importantes. El flujo en los tubos no presenta problemas para determinar los coeficientes convectivos. Para el flujo en la carcasa, la configuración es más complicada, y requiere nuevas correlaciones. El flujo del fluido en la carcasa no es paralelo al haz de tubos. Para aumentar el coeficiente de transferencia, se usan baffles o cortacorrientes que, bloquean parte de la sección transversal para el fluido en la carcasa e inducen en éste un movimiento alternante. El flujo es entonces una combinación de flujo cruzado y paralelo con respecto al haz. Los baffles son segmentos circulares con perforaciones para dejar pasar los tubos. Las láminas ilustran los diferentes tipos de carcasas y cabezales. Pueden combinarse carcasas y cabezales en infinitud de formas. Veremos con mayor detención tres tipos comunes:

- **Intercambiador 1-1:** Un paso por la carcasa, un paso por los tubos. Estos pueden hacerse funcionar en contracorriente.
- **Intercambiador 1-2:** Un paso por la carcasa, dos pasos por los tubos. El haz de tubos está dividido en dos, permitiendo el retorno del fluido, con entrada y salida de éste por el mismo terminal. Esto hace que una parte del haz esté en contracorriente y la otra en cocorriente.
- **Evaporador tipo *kettle*:** Un haz de tubos sumergido es calentado por algún medio (por ejemplo vapor en condensación). El fluido que moja los tubos se evapora (ebullición). La carcasa está considerablemente expandida para dejar espacio para la separación de vapor y líquido.

#### Método de *Kern* Para Determinar Coeficientes Convectivos en Carcasas

La determinación de coeficientes convectivos para el fluido del lado de la carcasa, la realiza *Kern* mediante la siguiente ecuación, obtenida mediante extensos conjuntos de datos industriales:

$$\frac{hD_e}{k} = 0,36 \left( \frac{D_e G}{\mu} \right)^{0,55} Pr^{0,33} \left( \frac{\mu}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad (2.102)$$

Para valores de  $Re$  entre 2000 y  $10^7$ . Para aplicar esta ecuación debe tenerse en cuenta que el flujo en carcasas es un flujo parcialmente cruzado con respecto al haz de tubos y parcialmente paralelo al haz. Ambas características del flujo influyen sobre los coeficientes de transferencia. Para determinar la velocidad másica  $G$  se considera el flujo cruzado.  $G=W/A$  en que  $W$  es el caudal másico total y  $A$  es el área de flujo. Esta área de flujo para flujo cruzado, se define como el área libre que queda en el espacio definido por dos baffles consecutivos en el plano medio horizontal de la carcasa. El área total de esta zona es  $L_s D_I$ , en que  $L_s$

es el espaciado entre baffles y  $D_I$ , el diámetro interno de la carcasa. Solo parte de esta area está disponible para el flujo. Si el diámetro exterior de los tubos es  $d_0$  y la distancia entre ejes de tubos es  $P$ , entonces el área de flujo será:

$$A = L_s D_I \frac{(P - d_0)}{P} \quad (2.103)$$

En cambio, para determinar el diámetro equivalente,  $D_e$ , se usará la noción de flujo paralelo al haz de tubos. En las figuras adjuntas se muestra la configuración unitaria de los arreglos cuadrado y triangular. El diámetro equivalente se define en ambos casos como:

$$D_e = 4 \frac{A_1}{p_m} \quad (2.104)$$

En que  $A_1$  es el área achurada y  $p_m$  es el perímetro mojado de los sectores circulares que limitan el área considerada. Para arreglo cuadrado tenemos, en consecuencia:

$$A_1 = P^2 - \pi \frac{d_0^2}{4} \quad (2.105)$$

$$p_m = \pi d_0 \quad (2.106)$$

Para arreglo triangular:

$$A_1 = P^2 \sqrt{\frac{3}{4}} - \pi \frac{d_0^2}{8} \quad (2.107)$$

$$p_m = \pi \frac{d_0}{2} \quad (2.108)$$

### **Diferencia Real de Temperatura en Intercambiadores de un Paso por la Carcasa y Número Par de Pasos por los Tubos**

La diferencia real de temperatura,  $\Delta T$  se calculará de la siguiente manera:

$$\Delta T = \Delta T_{log} F_T \quad (2.109)$$

En que  $\Delta T_{log}$  es la diferencia de temperatura que existiría si los fluidos se dispusieran en contracorriente y  $F_T$  es un factor de corrección que da cuenta del hecho de que los fluidos se cruzan parcialmente en contracorriente y parcialmente en cocorriente en un intercambiador 1-2.  $F_T$  es siempre menor que 1 ya que la disposición contracorriente es la que proporciona la máxima diferencia media de temperatura en un intercambiador.

Para intercambiadores de un paso por la carcasa, y número par de pasos por los tubos, *Kern* entrega una relación analítica para calcular  $F_T$  en función de las temperaturas terminales. Sea:

$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} \quad (2.110)$$

$$S = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} \quad (2.111)$$

$T$  designa a las temperaturas del fluido en la carcasa y  $t$  a las del fluido en los tubos.  $R$  representa la razón de los productos  $WC$  para los dos fluidos, y  $S$  es la razón entre el calor real transferido en el intercambiador, y el máximo calor que termodinámicamente sería posible transferir entre esos dos fluidos con temperaturas de entrada y caudales dados. El factor  $S$  se asimila entonces a la noción de "eficiencia del intercambiador de calor". En función de éstos parámetros,

$$F_T = \frac{\sqrt{R^2 + 1} \ln [(1 - S)/(1 - RS)]}{(R - 1) \ln \left[ \frac{2 - S(R + 1 - \sqrt{R^2 + 1})}{2 - S(R + 1 + \sqrt{R^2 + 1})} \right]} \quad (2.112)$$

Se recomienda no usar aquellas disposiciones de tubos que generen valores de  $F_T$  inferiores a 0.8 (Para no reducir demasiado la diferencia de temperatura). Para más de 1 paso por la carcasa, deben utilizarse gráficas de  $F_T$  que aparecen en la mayoría de los textos de transferencia de calor.

# Capítulo 3

## 3.1. Procesos de Cambio de Fase: Ebullición y Condensación

Conceptos necesarios:

- **Curva de saturación o curva de presión de vapor de una sustancia pura:** A cada presión, existe una temperatura en que las dos fases líquido y vapor coexisten. La temperatura en esa curva es el "punto de ebullición" del líquido a la presión considerada.
- **Calor latente de evaporación/condensación:** Es la diferencia entre las entalpías específicas de las fases líquido-vapor en estado de saturación. En los puntos de la curva de saturación, un fluido sólo puede entregar energía mediante condensación y recibirla mediante evaporación. En la fase líquida, fuera de la curva de saturación, el líquido está subenfriado. También fuera de esa curva el vapor está sobrecalentado. La transferencia de calor hacia o desde los fluidos en esos estados se realiza con variación de temperatura (calor sensible).
- **Punto crítico:** Para cada fluido puro existe un estado (T,P) en que las fases vapor y líquido son indistinguibles. Por lo tanto, el calor latente de evaporación es cero en ese estado. Los gases "permanentes" (aire, etc) están en estado supercrítico.
- **Evaporación:** Paso de una sustancia de la fase líquida a la fase vapor.
- **Condensación:** Paso de una sustancia de la fase vapor a la fase líquida.

La evaporación se puede producir de varias maneras:

1. Reducción de la presión ambiente sobre un líquido. (Evaporación instantánea o flash). Si la presión baja a un nivel inferior a la presión de saturación correspondiente a la temperatura inicial del líquido, una parte de éste se evapora, extrayendo el calor necesario del líquido restante, el cual se enfría hasta la temperatura de saturación correspondiente a la nueva presión. Este proceso se observa, por ejemplo, a la salida del líquido de una trampa de vapor, y en la válvula de expansión en un sistema de refrigeración. Si una masa  $M$  de líquido se descomprime entre presiones  $p_1$  y  $p_2$ , con temperaturas de saturación  $t_1$  y  $t_2$ , el balance de calor se escribe:

$$Mx\lambda = MC(1-x)(t_1 - t_2) \quad (3.1)$$

En que  $x$  es la fracción másica evaporada. Del balance anterior, esta fracción se puede determinar:

$$x = \frac{C\Delta T}{\lambda} \left( 1 + \frac{C\Delta T}{\lambda} \right) \quad (3.2)$$

2. Evaporación superficial. El aire siempre tiene un contenido de humedad (vapor de agua disuelto). Una masa de agua mantiene la capa de aire inmediatamente adyacente a su superficie en condiciones de humedad máxima (100 %). La diferencia entre las humedades de aire en la superficie y en la masa de aire provoca difusión de humedad. Al renovarse la condición de saturación en la superficie, se genera una evaporación continua, la cual extrae calor desde el líquido restante.
3. Ebullición. Esta se produce por aporte de calor a un líquido desde una superficie sumergida. Una vez que el líquido alcanza su temperatura de saturación (o punto de ebullición a la presión del sistema) el calor entregado por la superficie que está a  $T_p > T_{sat}$ , produce burbujas de vapor sobre ésta. Sólo una pequeña parte del vapor se genera sobre la superficie sumergida. Las burbujas formadas agitan el líquido permitiendo la transferencia de calor a éste.

La mayor parte de la evaporación tiene lugar desde la superficie del líquido. La condensación se produce cuando un vapor saturado se pone en contacto con una superficie a temperatura inferior a la de saturación, cediendo calor a ésta. El condensado formado tiende a formar una película sobre la superficie. Esta película constituye la principal resistencia térmica en un proceso de condensación. La ebullición y la condensación son procesos esencialmente isotérmicos, en lo que respecta al fluido que experimenta el cambio de fase, y mientras se mantiene la coexistencia de ambas fases.

Uno de los campos de aplicación más importantes de estos procesos es el de la refrigeración. El medio a ser enfriado transfiere calor a un fluido refrigerante en estado saturado, el cual se evapora (evaporador). El vapor es comprimido elevando su presión y temperatura, lo cual le permite entregando calor a un fluido auxiliar (agua o aire) en el condensador. El refrigerante en estado líquido a alta presión es descomprimido en forma adiabática en una válvula de expansión, que lo lleva de nuevo a la temperatura apropiada para la evaporación. En la válvula tiene lugar una descompresión, con evaporación instantánea de parte del líquido.

## 3.2. Transferencia de Calor en Ebullición

### 3.2.1. Ebullición en Recipientes

Una vez establecido el régimen de ebullición, la temperatura del líquido será la de saturación ( $T_{sat}$ ) a la presión del sistema. Para que exista ebullición, la temperatura de la superficie sumergida ( $T_p$ ) debe estar algunos grados por sobre  $T_{sat}$ . La diferencia de temperatura es entonces  $\Delta T = T_p - T_{sat}$ .

Otra condición necesaria para producir ebullición es la existencia de microcavidades en la superficie. Las burbujas se forman en estas microcavidades. La figura siguiente ilustra la "Curva de ebullición" para



agua. Representa la relación  $q - \Delta T$  para este proceso. Fue mostrada por primera vez por *Nukiyama* (1935).

Se observan varios regímenes:

1. Convección natural
2. Ebullición nucleada. Formación de burbujas en la superficie.
3. Ebullición inestable, en transición.
4. Ebullición estable en película.

La forma de la curva está determinada por los diversos mecanismos de transferencia que se suceden al aumentar  $\Delta T$  o  $q$ . La parte de ebullición nucleada está descrita por la correlación de *Rohsenow* (1952). Esta ecuación es:

$$\frac{C_l \Delta T}{\lambda} = C_{sf} \left[ \frac{q}{\mu_l \lambda} \left( \frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_v)} \right)^{0,5} \right]^{0,33} Pr_l^{1,7} \quad (3.3)$$

La obtención de esta ecuación es semiempírica, y se basa en los siguientes supuestos:

1. La ebullición es un proceso convectivo que compromete al líquido. Las burbujas provocan la agitación (convección) desde que se desprenden de la superficie. En este sentido, se trata de una microconvección. La longitud significativa de este proceso convectivo es el diámetro de la burbuja al desprenderse ( $Db$ ). Las dimensiones de la superficie calefactora no ejercen, por lo tanto, ninguna influencia.
2. La relación  $q - \Delta T$  variará con cada fluido y superficie. Esto está dado cuenta por el factor empírico  $C_{sf}$ .

Valores de  $C_{sf}$ :

- Agua-cobre: 0.013
- Agua- acero inoxidable: 0.0132
- Agua-platino: 0.013

Hay tablas extensas de este coeficiente en todos los libros de transferencia de calor. La obtención de la ecuación de *Rohsenow* se basa en los siguientes razonamientos: Como todo proceso convectivo que se efectúa en un líquido, la ebullición se puede caracterizar por una ecuación del tipo:

$$Nu = C Re^a Pr_l^b \quad (3.4)$$

La convección es generada por el movimiento de las burbujas. Estas crecen adheridas a la superficie. Durante el crecimiento la agitación que provocan es escasa. Luego de desprenderse, no pueden seguir creciendo. La longitud significativa es, por lo tanto, el diámetro medio de las burbujas al desprenderse,  $D_b$ . El número de Nusselt se forma con  $D_b$  y con la conductividad térmica del líquido:

$$Nu = \frac{q D_b}{(T_p - T_{sat}) k_l} \quad (3.5)$$

La diferencia significativa de temperatura es  $\Delta T = T_p - T_{sat}$ .  $q$  es el calor total transferido por la superficie al fluido en ebullición. El número de Reynolds es  $GD_b/\mu_l$ .  $G$  es la masa de vapor generada por unidad de área y tiempo sobre la superficie. El calor total  $q$  se divide en una parte empleada en generar vapor ( $q_b$ ) y otra transferida directamente al líquido ( $q_l$ ),

$$q = q_b + q_l \quad (3.6)$$

En que  $q_b = G\lambda$ . Al crecer  $G$  aumenta  $q_b$ . Además, debido a la mayor agitación causada por un mayor  $G$  (mayor número de burbujas),  $q_l$ , y luego  $q$  también crecen con  $G$ . Entonces:

$$q = C_1 G \lambda \quad (3.7)$$

Y como consecuencia,

$$G = \frac{q}{C_1 \lambda} \quad (3.8)$$

$C_1$  es una constante de proporcionalidad. El número de Reynolds ( $GD_b/\mu_l$ ) queda expresado por:

$$Re = \frac{q D_b}{C_1 \lambda \mu_l} \quad (3.9)$$

Por lo tanto:

$$\frac{q D_b}{\Delta T k_l} = C \left( \frac{q D_b}{C_1 \lambda \mu_l} \right)^a Pr_l^b \quad (3.10)$$

Que se arregla a:

$$\frac{C_1 \Delta T}{\lambda} = \frac{C_1^a}{C} \left( \frac{q D_b}{\lambda \mu_l} \right)^{1-a} Pr_l^{1-b} \quad (3.11)$$

El único parámetro todavía no determinable es  $D_b$ . Las fuerzas que actúan sobre una burbuja en las fases finales de su crecimiento son:

- La tensión superficial, que tiende a mantener la burbuja en su puesto, y
- La fuerza de empuje ocasionada por la diferencia de densidad entre el líquido y el vapor. Esta fuerza tiende a desprender la burbuja. En base a estas dependencias, *Fritz* (1935) mediante filmaciones de alta velocidad determinó un valor más probable para el diámetro de una burbuja al desprenderse:

$$D_b = C_2 \beta \left[ \frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_v)} \right]^{0.5} \quad (3.12)$$

$\sigma$  es la tensión superficial gas-líquido,  $g$  la constante de gravedad y  $\beta$  es el ángulo de contacto de la burbuja con la superficie. El ángulo  $\beta$  depende de la naturaleza combinada de la superficie y el fluido. Usando esta expresión para  $D_b$  se llega a la expresión final:

$$\frac{C_1 \Delta T}{\lambda} = C_{sf} \left[ \frac{q}{\mu_l \lambda} \left( \frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_v)} \right)^{0.5} \right]^{1-a} Pr_l^{1-b} \quad (3.13)$$

*Rohsenow* hizo experimentos para encontrar el valor de los exponentes, determinando  $1-a=0.33$  y  $1-b=1.7$ . El coeficiente  $C_{sf}$  está tabulado en función de la combinación fluido-superficie. Existen otras correlaciones más modernas para este mismo fenómeno. En particular, la predicción de que

$$q \propto \Delta T^3 \quad (3.14)$$

Es desmentida en muchos estudios, en que se encuentran exponentes aún más altos. La ecuación de *Rohsenow* nos permite encontrar órdenes de magnitud de los flujos de calor encontrados en ebullición nucleada. Esto se ilustrará con un ejemplo.

### 3.3. Condensación

Ecuación de Nusselt (1916). Condensación de un vapor saturado a  $T_v$  sobre un plano inclinado ( $\alpha$ ) a temperatura  $T_p < T_v$ .  $x$  es la coordenada a lo largo del plano, e  $y$  la coordenada normal a éste. Sobre la superficie se forma una delgada película laminar de condensado, de espesor  $d$ , que constituye una resistencia térmica que limitará la tasa de condensación. En el desarrollo de Nusselt se supone que en la película las fuerzas de inercia son nulas (balance estático de fuerzas). Esto implica que existen solo fuerzas de gravedad y viscosas. La condensación se realiza en un recinto de presión uniforme y por lo tanto no hay gradiente de presión. La ecuación de movimiento se reduce a:

$$0 = (\rho_l - \rho_v)g \sin(\alpha) + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (3.15)$$

Para la cual las condiciones de borde son:

- $u=0$  en  $y=0$ , que expresa la condición de flujo viscoso sobre una superficie en reposo.
- $du/dy=0$  en  $y=\delta$ . (No hay roce entre la capa de condensado y el vapor)

Con estas condiciones se obtiene el perfil de velocidad:

$$u = \frac{(\rho_l - \rho_v)g \sin(\alpha)}{\mu} \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right) \quad (3.16)$$

El caudal másico de condensado por unidad de ancho,  $\Gamma$ , se obtiene por integración del perfil de velocidad:

$$\Gamma = \rho_l \int_0^\delta u dy = \left[ \frac{\rho_l (\rho_l - \rho_v) g \sin(\alpha) \delta^3}{3\mu} \right] \quad (3.17)$$

El calor transferido por conducción a través de la película es:

$$dQ = \frac{k}{\delta} (T_v - T_p) dx \quad (3.18)$$

En que la diferencia de temperatura significativa para la transferencia de calor es  $T_v - T_p$ . La tasa de condensación en una franja  $dx$  se expresa:

$$d\Gamma = \frac{dQ}{\lambda} = \frac{k(T_v - T_p) dx}{\lambda \delta} \quad (3.19)$$

$$d\Gamma = \left[ \frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)g \sin(\alpha)}{\mu} \right] \delta^2 d\delta = \frac{k}{\lambda \delta} (T_v - T_p) dx \quad (3.20)$$

Se obtiene una ecuación diferencial para  $\delta$ . Notando además que el espesor es cero en  $x=0$ , y que el coeficiente "convectivo"  $h(x)$  es igual a  $k/\delta$ , se obtiene:

$$h(x) = \left[ \frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)g \sin(\alpha) \lambda k^3}{4\mu x \Delta T} \right]^{0,25} \quad (3.21)$$

Lo que promediado sobre una longitud  $L$  de plano inclinado, da:

$$\bar{h} = 0,943 \left[ \frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)g \sin(\alpha) \lambda k^3}{\mu L \Delta T} \right]^{0,25} \quad (3.22)$$

El caso de una placa vertical está dado por  $\sin(\alpha)=1$ . Para condensación sobre la superficie exterior de un tubo horizontal de diámetro  $D$ , un método similar (aunque algo más complicado) entrega la solución:

$$\bar{h} = 0,725 \left[ \frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)g \sin(\alpha) \lambda k^3}{\mu D \Delta T} \right]^{0,25} \quad (3.23)$$

En los dos casos estudiados, la tasa de condensación está controlada por la evacuación del condensado producido. Este a su vez se evacúa por gravedad. A pesar de las simplificaciones de este desarrollo, se encuentra que las predicciones de estas teorías (en cuanto a coeficientes de transferencia) se desvían no más de 15 % de los resultados experimentales.

### 3.4. Convección Natural

En la convección forzada el fluido se mueve por la acción de una fuerza externa. En convección natural el fluido se mueve debido a cambios de densidad que resultan del calentamiento o enfriamiento del fluido. Una superficie caliente a  $T_p$  en un medio de temperatura  $T < T_p$ , calienta el fluido circundante, el cual disminuirá su densidad respecto a la del fluido lejos de la superficie. Se produce una fuerza de empuje que hace ascender el fluido de menor densidad. Como resultado se establece un flujo continuo cuya velocidad depende de la magnitud de la diferencia  $\Delta T = T_p - T_\infty$ . Similarmente si  $T_p < T_\infty$  el flujo generado cerca de la superficie tendrá dirección descendente.

En ambos casos el flujo resultante causa un flujo de calor desde o hacia la superficie sólida. Como el flujo tiene su origen en la existencia de  $\Delta T$ , es ésta y no una velocidad externa la variable que causa el movimiento. Luego, no se puede definir un número de Reynolds como parámetro independiente. Consideremos una placa plana vertical. El eje  $x$  es paralelo a la placa y el eje  $y$  perpendicular a esta, con  $x$  en dirección ascendente. A los ejes  $x$  e  $y$  corresponden velocidades  $u$  y  $v$ . El vector aceleración de gravedad apunta hacia abajo. Si la placa está a mayor temperatura que el ambiente, y se formará una capa límite de flujo ascendente, con origen en  $x=0$ . La ecuación de movimiento en dirección  $x$ , considerando término gravitatorio y gradiente de presión, es:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.24)$$

Muy lejos de la superficie, el fluido tiene temperatura uniforme  $T_\infty$  y una densidad a esa temperatura, que denotaremos por  $\rho_\infty$ . Como la densidad es uniforme lejos de la superficie,  $u=v=0$  en esa ubicación, y el campo de presión es estático, por lo tanto la ecuación de movimiento se reduce a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_\infty g \quad (3.25)$$

Substituyendo la ecuación anterior en la primera, se obtiene:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (\rho_\infty - \rho)g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.26)$$

La diferencia de densidades se puede expresar en términos del coeficiente volumétrico de expansión térmica,  $\beta$ , definido por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (3.27)$$

Expresando la derivada por diferencias finitas se obtiene:

$$\rho_\infty - \rho = -\beta \rho (T_\infty - T) \quad (3.28)$$

Y por lo tanto, el problema completo de flujo y transferencia en la capa límite de convección natural estará descrito por el siguiente sistema de ecuaciones de continuidad, momento y energía:

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.30)$$

$$\left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.31)$$

El problema de convección natural es, pues, un problema no lineal, y acoplado ya que la temperatura aparece tanto en la ecuación de la energía como en la de movimiento. No se puede separar en un problema dinámico y un problema térmico, como se hacía en convección forzada. Se puede demostrar que el coeficiente de expansión térmica de un gas ideal es igual a  $1/T_\infty$ .

### 3.4.1. Análisis Dimensional de las Ecuaciones Diferenciales

Si se definen las siguientes variables adimensionales:  $X = \frac{x}{L}$ ,  $Y = \frac{y}{L}$ ,  $U = \frac{uL}{\nu}$ ,  $V = \frac{vL}{\nu}$ ,  $\Theta = \frac{(T-T_\infty)}{(T_p-T_\infty)}$ . Las ecuaciones de energía y momentum quedarán:

$$U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \quad (3.32)$$

$$U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{g\beta(T - T_\infty)L^3}{\nu^3} \Theta \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (3.33)$$

Aparecen dos grupos adimensionales: el conocido número de Prandtl y el número de Grashof,

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2} \quad (3.34)$$

Que es el parámetro fluidodinámico de la convección natural. En consecuencia, la dependencia adimensional de la transferencia de calor en convección natural es:

$$Nu = \frac{hL}{k} = f(Gr, Pr) \quad (3.35)$$

Las correlaciones de trabajo en convección natural se basan en esa dependencia. En cada situación geométrica se debe especificar la longitud significativa para formar los números de Nusselt y Grashof, y la diferencia de temperatura. En la mayoría de los casos se usa en lugar de Grashof el número de Rayleigh,  $Ra=GrPr$ .

### 3.5. Casos de Flujo Externo (Capa Límite Laminar y Turbulenta)

Los casos de flujo externo por convección natural son la base de determinación de pérdidas térmicas desde equipos. Las geometrías más útiles desde el punto de vista práctico son: Placas y cilindros verticales, cilindros horizontales, y placas horizontales. Las correlaciones predicen valores medios de los coeficientes convectivos. En convección natural la transición de régimen laminar a turbulento ocurre a un valor del producto  $GrPr$  especificado para cada situación geométrica.

#### 3.5.1. Convección Natural Desde Placas Planas y Cilindros Verticales

En este caso se definen el Grashof y el Nusselt como sigue:

$$Gr_L = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2} \quad (3.36)$$

$$Nu_L = \frac{hL}{k} \quad (3.37)$$

En que  $g$  es la aceleración de gravedad ( $g=9.8 \text{ m/s}^2$ ),  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica del fluido,  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura entre la pared y el fluido,  $L$  es una dimensión vertical del cuerpo y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. La correlación disponible para este caso es:

$$Nu_L = \frac{hL}{k} = C(Gr_L Pr)^n \quad (3.38)$$

En la cual:

- $C=0.59$  y  $n=0.25$  en régimen laminar,
- $C=0.1$  y  $n=0.333$  en régimen turbulento.

La transición de flujo laminar a turbulento se produce para un valor de  $Gr_L Pr$  de  $10^9$ . Puede observarse en esta correlación que tanto  $Nu$  como  $h$  dependen explícitamente de la diferencia de temperatura  $\Delta T$ , a diferencia de los casos de convección forzada en que no se observa esa dependencia explícita.  $h$  es proporcional a  $\Delta T^{0.25}$  y a  $\Delta T^{0.333}$  en régimen laminar y turbulento respectivamente.

### 3.5.2. Exterior de Cilindros Horizontales

En este caso la dimensión significativa es el diámetro exterior  $D$  del cilindro:

$$Nu_D = \frac{hD}{k} = C(Gr_D Pr)^n \quad (3.39)$$

En la cual

- $C=0.53$  y  $n=0.25$  en régimen laminar,
- $C=0.13$  y  $n=0.333$  en régimen turbulento

La transición de flujo laminar a turbulento se produce también en este caso para un valor de  $Gr_D Pr$  de  $10^9$ .

Para los dos casos anteriores las correlaciones valen indistintamente si la superficie está a mayor temperatura que el fluido (flujo ascendente con transferencia de calor desde la superficie al fluido), o si el fluido está a mayor temperatura que la superficie (flujo descendente con transferencia de calor desde el fluido a la superficie).

### 3.5.3. Placas Horizontales

En este caso además del signo de  $\Delta T$  se debe especificar si la superficie que disipa calor está orientada hacia arriba o hacia abajo. En los casos precedentes la dimensión significativa era fácil de asignar, ya que es natural asociarla a la extensión vertical de la superficie, considerando que se desarrolla una capa límite ascendente o descendente. En una superficie horizontal, en cambio, la superficie no tiene extensión vertical, y hay que buscar la dimensión significativa. Suponiendo que en la cara superior de una placa horizontal a mayor temperatura que el ambiente también se desarrolla capa límite, las ecuaciones de ésta serán:

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g\beta(T - T_\infty) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.40)$$

En que  $x$  es la coordenada horizontal paralela a la placa, medida desde un borde izquierdo de ésta, e  $y$  es la vertical. Se observa que no se puede eliminar la presión dinámica  $P$ , como en el caso vertical.  $U$  y  $v$  son las velocidades correspondientes a  $x$  e  $y$ . En primera instancia la placa calienta las moléculas de aire adyacentes a la placa, las cuales tienden a ascender. Se forma una pequeña depresión sobre la placa, y favorecido por este gradiente de presión, ingresa fluido desde el borde izquierdo, en forma paralela a la placa, formando una capa límite horizontal. Por el borde derecho también ingresa fluido hacia la placa constituyendo otra capa límite. Ambas capas se juntan en el centro de la placa, y forman una corriente ascendente. De este modo se ve que al formarse capas límites horizontales, la dimensión significativa para Nusselt y Grashof es horizontal. Como en una placa rectangular hay ingreso de aire por los cuatro bordes, y en una placa circular hay ingreso radial, la dimensión significativa se forma con:  $L=A/P=area\ placa/perímetro\ de\ la\ misma$ . Las correlaciones disponibles para este caso son también de la forma:

$$Nu_L = \frac{hL}{k} = C(Gr_L Pr)^n \quad (3.41)$$

En que distinguimos 4 casos:

1. Cara superior caliente (con respecto al ambiente).
2. Cara inferior fría.
3. Cara superior fría.
4. Cara inferior caliente.

Los casos 1 y 2 presentan el modo de circulación descrito y se pueden tratar de una manera unificada. Los casos 3 y 4 presentan una circulación inversa (el fluido se acerca al centro de la placa verticalmente y sale paralelo a ésta), y se tratan también de forma unificada.

Casos 1 y 2:

- $C=0.54, n=0.25$  ( $10^4 \leq Ra \leq 10^7$ )
- $C=0.15, n=0.33$  ( $10^7 \leq Ra \leq 10^{11}$ )

Casos 3 y 4:

- $C=0.27, n=0.25$  ( $10^5 \leq Ra \leq 10^{10}$ )



# Capítulo 4

## 4.1. Radiación Térmica

La radiación es el tercer mecanismo de transferencia de calor pertenece a la categoría de fenómenos ondulatorios. Todas las sustancias emiten radiación electromagnética causada por agitación atómica y molecular, o transiciones electrónicas. Esta radiación está asociada a la energía interna del material. La radiación E.M. puede propagarse aún en ausencia de un medio material. El espectro electromagnético está formado por radiaciones de longitudes de onda ( $\lambda$ ) muy variables. Las ondas de radio tienen  $\lambda$  del orden de decenas de metros y la radiación cósmica tiene longitudes del orden de  $10^{-14}$  m. En el curso nos interesa sólo la radiación que es detectada en forma de calor y luz (Radiación Térmica). Esta ocupa un rango intermedio del espectro. Este rango comprende:

- la parte de onda larga del rango ultravioleta (UV),
- el espectro visible ( $0.4\text{-}0.7 \mu\text{ m}$ ),
- y el rango infrarrojo que se extiende desde  $0.7$  a  $1000 \mu\text{ m}$

A mayores longitudes de onda están las ondas de radar, televisión y radio. A menores  $\lambda$  se ubican los rayos X, los rayos  $\gamma$  y los rayos cósmicos. La radiación térmica es por lo tanto un fenómeno espectral, pudiéndose definir flujos de energía para cada longitud de onda. Integrando los flujos de energía espectrales para todo el rango de longitud de onda, se obtienen los flujos de energía totales.

Igualmente, la radiación es un fenómeno direccional, (un elemento de superficie emite una cierta cantidad de energía en cada dirección angular, e integrándolas se obtiene la emisión hemisférica). En este curso, por simplicidad, pondremos mayor énfasis en propiedades totales hemisféricas. Sin embargo, un tratamiento adecuado del intercambio por radiación sólo puede hacerse en forma rigurosa en términos de propiedades espectrales direccionales, a las cuales nos referiremos cuando sea necesario. Definición de propiedades totales respecto a la radiación incidente: Una superficie recibe una energía radiante incidente  $G$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ). La superficie puede absorber, reflejar o transmitir esta energía. Sean

- $\alpha = G_a/G$ , fracción absorbida o absorptividad de la superficie.

- $\rho = G_r/G$ , fracción reflejada o reflectividad.
- $\tau = G_t/G$ , fracción transmitida o transmisividad.

Como  $G = G_a + G_r + G_t$ , entonces  $\alpha + \rho + \tau = 1$ . **Sólo la fracción absorbida** pasa a formar parte de la energía interna del cuerpo. Por lo tanto sólo ésta puede causar un aumento de temperatura de éste.

#### 4.1.1. Emisión y Ley de Kirchoff

Los cuerpos emiten una energía radiante que es función de su temperatura superficial. La emisión total hemisférica (en todas direcciones) de un elemento de superficie se denomina "poder emisivo" (emissive power),  $E$  ( $W/m^2$ ), el cual sólo es nulo si la superficie se encuentra a 0 °K. La ley de Kirchoff relaciona las propiedades emisivas y absorptivas. Se deduce mediante el siguiente razonamiento: Consideremos un espacio cerrado, evacuado y aislado del medio externo. En el interior del espacio se ubican dos cuerpos pequeños de áreas  $A_1$  y  $A_2$ , con absorptividades  $a_1$  y  $a_2$ . Dado que el sistema está aislado, los cuerpos alcanzarán temperaturas iguales entre sí y además iguales a la de la pared interior del recinto. Estas temperaturas permanecerán constantes en el tiempo, a causa de la aislación. Como cada cuerpo recibe una energía radiante,  $G$ , desde las paredes, debe emitir una energía  $E$  igual a la absorbida para mantenerse a temperatura constante. Por lo tanto el balance de calor para cada cuerpo iguala la energía total absorbida con la emitida:

$$A_1 G \alpha_1 = A_1 E_1 \quad (4.1)$$

$$A_2 G \alpha_2 = A_2 E_2 \quad (4.2)$$

Simplificando las áreas y haciendo el cociente, obtenemos:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{E_1}{E_2} \quad (4.3)$$

Por lo tanto, los poderes emisivos son proporcionales a las absorptividades. Esto implica que a una misma temperatura, emite más energía el cuerpo que más absorbe. (Consultar en libros de transferencia de calor para obtener una descripción de este razonamiento en mayor detalle). Supongamos ahora que el cuerpo 2 es tal que  $\alpha_2 = 1$  (absorbe toda la radiación incidente). Entonces:  $E_1 = \alpha_1 E_2$ . El cuerpo que absorbe toda la radiación incidente se denomina **cuerpo negro**. (Aunque no sólo la radiación en el rango visible es la que se absorbe). La ecuación anterior expresa que: el poder emisivo de un cuerpo cualquiera a temperatura  $T$  es igual al producto de la absorptividad de este cuerpo por el poder emisivo que tendría un cuerpo negro a la misma temperatura. Finalmente, observemos el cociente

$$\frac{E_1}{E_2} = \alpha_1 \quad (4.4)$$

Dado que  $\alpha_1 < 1$ , entonces el P.E. de un cuerpo no negro es siempre menor que el de un cuerpo negro a una misma temperatura, el cual es, en consecuencia, el que emite la mayor cantidad de energía a cada

temperatura. La razón  $E_1/E_2$  se denomina también "emisividad" del cuerpo no negro y se denota por  $\epsilon$ . La emisividad total de un cuerpo es igual a su absorptividad.

$$\epsilon_1 = \alpha_1 \quad (4.5)$$

Se concluye entonces que para calcular el poder emisivo de un cuerpo, se debe evaluar su emisividad (propiedad que se determina experimentalmente y está tabulada en libros) y el P.E. de un cuerpo negro a la misma temperatura. Las emisividades totales varían entre 0 y 1. Para materiales de construcción y pinturas  $\epsilon$  es usualmente superior a 0.9. Para metales pulidos  $\epsilon$  puede tomar valores de 0.05. La emisividad disminuye con el grado de pulimento y aumenta con la rugosidad, la oxidación y la suciedad de una superficie metálica. El cuerpo negro ( $\epsilon=1$ ,  $\alpha=1$ ) no existe en la naturaleza. Sin embargo, puede fabricarse mediante un dispositivo que asegure la ausencia de reflexiones de la radiación incidente.

#### 4.1.2. Poder Emisivo de un Cuerpo Negro

La dependencia del P.E. de un cuerpo negro con la temperatura superficial fue estudiada durante el siglo 19, dando lugar a la conocida Ley de *Stefan – Boltzmann* (1879).

$$E = \sigma T^4 \quad (4.6)$$

En que  $\sigma$  es una constante universal ( $5.67051 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ ). La ley está basada en datos experimentales de *Tyndall*, elaborados por *Stefan* para llegar a la ley, la que fue respaldada por una deducción clásica de *Boltzmann* (la cual todavía se puede ver en el libro de M. Jakob, Heat Transfer, Vol, 2, 1955). La ley de *Stefan – Boltzmann* se refiere al poder emisivo total. La distribución espectral del poder emisivo hacia el vacío fue dada por *Planck* (1903).

$$E_{n\lambda} = \frac{2\pi C_1}{\lambda^5 (\exp(C_2/\lambda T) - 1)} \quad (4.7)$$

- $C_1 = 0.59552197 \times 10^{-16} \text{ W/m}^2\text{sr}$
- $C_2 = 0.01438769 \text{ mK}$

$E_{n\lambda}$  es el poder emisivo espectral, o "monocromático", y se expresa en  $\text{W/m}^2 \mu\text{m}$ . Representa la energía emitida en un pequeño intervalo  $d\lambda$  en torno a una longitud de onda  $\lambda$ . El poder emisivo total se obtiene de integrar el P.E. espectral en el rango completo de  $\lambda$ :

$$E_n = \int_0^\infty E_{n\lambda} d\lambda = \sigma T^4 \quad (4.8)$$

Esta igualdad se puede verificar realizando la integración. Combinando la ley de *Kirchoff* con la de *Stefan – Boltzmann*, se encuentra que el poder emisivo de un cuerpo caracterizado por una emisividad  $\epsilon$ , es

$$E = \epsilon \sigma T^4 \quad (4.9)$$

## 4.2. Energía Radiante Total que Sale de un Cuerpo

Un cuerpo negro emite energía  $E_N = \sigma T^4$  por unidad de área en todas las direcciones del espacio. Un cuerpo no negro, de emisividad  $\epsilon$ , no transparente, sobre el cual incide una energía  $G$  por unidad de área, envía a los alrededores una energía total ( $J$ ) que es igual a la suma de la emitida y la reflejada:

$$J = E + \rho G = \epsilon E_N + (1 - \epsilon)G \quad (4.10)$$

$J$  se denomina "radiosidad" del cuerpo. El flujo neto intercambiado por el cuerpo con los alrededores es

$$q = J - G = \epsilon(E_N - G). \quad (4.11)$$

De esta igualdad,

$$G = \frac{J - \epsilon E_N}{1 - \epsilon} \quad (4.12)$$

Reemplazando  $G$  en  $q = J - G$ , se obtiene

$$q = \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon)} [E_N - J] \quad (4.13)$$

Si el cuerpo tiene área  $A$ , el calor  $Q$  que intercambia con los alrededores es:

$$Q = \frac{A\epsilon}{(1 - \epsilon)} [E_N - J] \quad (4.14)$$

Tanto la energía emitida como la reflejada se envían en forma difusa (con iguales intensidades en todas direcciones).

## 4.3. Intensidad de Radiación

Este concepto surge de la necesidad de evaluar el intercambio radiativo entre cuerpos a distancia. Para dos cuerpos 1 y 2 cualesquiera, la energía radiante proveniente de 1 que incide sobre 2, será sólo una fracción de la energía total que sale. Consideremos una semiesfera de radio  $R$  con un elemento de área emisora  $dA_1$  en su centro. El área receptora  $dA_2$  está ubicada en la superficie de la semiesfera. Esta subtiende un ángulo sólido  $d\omega = dA_2/R^2$ . La dirección entre los dos elementos de área está definida por un ángulo de altura,  $\varphi$ , medido entre la normal a  $dA_1$  y la dirección  $R$ , y un ángulo azimutal,  $\psi$ .

**Definición:** La intensidad de radiación en una dirección dada,  $I$ , es la energía enviada:

- por unidad de tiempo,
- por unidad de área proyectada normal a la dirección de propagación,
- en un ángulo sólido elemental centrado en la dirección dada.

El área emisora proyectada sobre la dirección de propagación es  $dA_1 \cos(\varphi)$ . Se puede expresar la energía enviada por 1 hacia 2 en términos de  $I$ :

$$d^2Q = IdA_1 \cos(\phi) \frac{dA_2}{R^2} \quad (4.15)$$

El flujo radiativo total direccional en la dirección dada,  $dJ$ , es:

$$\frac{d^2Q}{dA_1} = dJ = \frac{IdA_2 \cos(\phi)}{R^2} \quad (4.16)$$

Entonces la radiosidad hemisférica,  $J$ , se obtiene por integración de  $dJ$  sobre la superficie de la semiesfera: Si  $I$  es la misma para todas las direcciones, y

$$dA = Rd\varphi R \sin(\varphi) d\Psi \quad (4.17)$$

$$J = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} I \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \right) d\Psi = I\pi \quad (4.18)$$

La intensidad de radiación en una dirección cualquiera está dada entonces por:

$$I = \frac{J}{\pi} \quad (4.19)$$

Si el emisor es un cuerpo negro,  $J=E_n$ , es decir

$$I = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (4.20)$$

De lo cual observamos que  $I$  crece con  $T$ .

## 4.4. Intercambio de Energía por Radiación Entre Dos Cuerpos

Cada cuerpo emite una energía que es función de su temperatura. Por ser  $I$  creciente con  $T$ , la energía enviada por el cuerpo de mayor temperatura es mayor, y por lo tanto surge un **flujo neto** de energía desde el cuerpo de alta temperatura al de baja. El intercambio depende en gran medida de factores geométricos, que dan lugar al concepto de "factor de forma".

### 4.4.1. Concepto Factor de Forma

Estudiaremos ahora el calor que intercambian dos cuerpos elementales de áreas  $dA_1$  y  $dA_2$ :

- a temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ ,
- de los cuales salen energías totales  $J_1$  y  $J_2$ .

Si nos ubicamos en  $dA_1$ , vemos el cuerpo  $dA_2$  en una ubicación particular del hemisferio que rodea a  $dA_1$ .  $A_2$  ya no está ubicado en la superficie de una semiesfera centrada en  $A_1$ . La energía enviada por  $dA_1$  que incide sobre  $dA_2$  es:

$$d^2Q_{1-2} = J_1 dA_1 \cos(\phi_1) \frac{dA_2 \cos(\phi_2)}{\pi r^2} \quad (4.21)$$

$J_1/\pi$  es la intensidad enviada en la dirección de la recta de unión entre los dos cuerpos, la cual tiene longitud  $r$ . Los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son aquellos formados por la normal a cada superficie con la recta de unión. Como  $dA_2$  no forma parte de la superficie de la esfera, no es normal a la recta de unión. Los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  no están necesariamente en un mismo plano. La relación anterior puede escribirse:

$$d^2Q_{1-2} = J_1 dA_1 \frac{dA_2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} = J_1 dA_1 dF_{1-2} \quad (4.22)$$

En que  $dF_{1-2}$  es el "Factor de Forma" diferencial con que se ve el elemento 2 desde el 1. Es enteramente una magnitud geométrica (ya que aparecen sólo ángulos planos y sólidos), y es adimensional. Del mismo modo, la energía enviada por el cuerpo 2 sobre el cuerpo 1 puede escribirse:

$$d^2Q_{2-1} = J_2 dA_1 \frac{dA_2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} = J_2 dA_1 dF_{1-2} \quad (4.23)$$

Con lo cual el flujo neto entre de energía entre los dos elementos es:

$$d^2Q = d^2Q_{1-2} - d^2Q_{2-1} = (J_1 - J_2) dA_1 \frac{dA_2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} = (J_1 - J_2) dA_1 dF_{1-2} \quad (4.24)$$

Si ahora nos ubicamos en el elemento 2 por los mismos razonamientos podemos definir el factor de forma  $dF_{2-1}$  con que se ve el elemento 1 desde el 2. El flujo neto es entonces:

$$d^2Q = (J_1 - J_2) dA_2 \frac{dA_1 \cos(\phi_2) \cos(\phi_1)}{\pi r^2} = (J_1 - J_2) dA_2 dF_{2-1} \quad (4.25)$$

La determinación de factores de forma entre elementos de área es simple y directa. Cuerpos finitos pueden considerarse como elementos de área si la distancia entre ellos es grande con respecto a las dimensiones de los cuerpos. Si esto no se cumple, deben obtenerse factores de forma para áreas finitas por integración de los factores de forma elementales.

#### 4.4.2. Factor de Forma Entre un Elemento de Área $dA_1$ y un Área Finita $A_2$ (Isoterma)

Si la relación que da el intercambio térmico en función del factor de forma entre 2 elementos de área se integra sobre todos los elementos de área constituyentes del área  $A_2$ :

$$dQ = (J_1 - J_2) dA_1 \int_{A_1} \frac{dA_2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} = (J_1 - J_2) dA_1 \int_{A_1} dF_{1-2} = (J_1 - J_2) dA_1 F_{1-2} \quad (4.26)$$

$F_{12}$  es el factor de forma entre un elemento de área  $dA_1$  y un área finita  $A_2$ .

#### 4.4.3. Factor de Forma Entre Dos Áreas Finitas $A_1$ y $A_2$ , Isotermas

El área  $A_1$  puede considerarse como un agregado de elementos de área  $dA_1$ . Para cada uno de estos elementos se puede definir un factor de forma respecto al área  $A_2$ . El factor de forma entre las dos áreas finitas se puede definir como el promedio de los factores de forma con que los elementos  $dA_1$  ven el área  $A_2$ .

$$dQ = (J_1 - J_2)A_1 \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{dA_1 dA_2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} = (J_1 - J_2)A_1 \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} A_1 dF_{1-2} \quad (4.27)$$

$$Q = (J_1 - J_2)A_1 \overline{F_{1-2}} \quad (4.28)$$

Esta es la ecuación de transferencia directa entre dos cuerpos de áreas finitas. Notar que los potenciales en radiación son radiosidades. Para cuerpos negros  $J=E_n$ . La ecuación anterior toma la forma:

$$Q = (E_{n1} - E_{n2})A_1 \overline{F_{1-2}} \quad (4.29)$$

Para cuerpos negros, ya podemos calcular los intercambios conociendo las áreas, los factores de forma, y los poderes emisivos dados por la ley de *Stefan – Boltzmann*. Para cuerpos no negros, en cambio, necesitamos las radiosidades ( $J$ ), que dependen de la energía emitida y de la energía incidente. El siguiente desarrollo nos permitirá conocer los  $J$ , y poder usar la ecuación de transferencia.

## 4.5. Radiación en Cavidades de N Cuerpos

La situación más importante de radiación directa entre cuerpos se da en cavidades cerradas (hornos, cámaras de combustión, etc.). El formulismo siguiente se aplica a estos casos, aún cuando algunos de los cuerpos sean espacios abiertos (ventanas) considerando que estos no reflejan radiación. Se considera una cavidad de  $N$  cuerpos, todos a temperaturas uniformes pero diferentes. Los cuerpos pueden ser:

1. Fuentes térmicas calientes (ej. superficie calefactora en un horno). Recibe energía por medios externos. Ej: resistencias eléctricas.
2. Fuentes frías: La superficie o material que al cual se debe suministrar energía. Esta debe ser evacuada al exterior.
3. Superficies pasivas: Constituyen el aislamiento térmico del recinto y no aportan ni substraen energía. La condición  $Q=0$  en la superficie implica que su temperatura es variable dependiente.

Consideremos una superficie  $i$  del recinto. El intercambio de calor de ésta con otra superficie  $j$  es:

$$Q_{ij} = (J_i - J_j)A_i \overline{F_{i-j}} \quad (4.30)$$

Y el intercambio de la superficie  $i$  con todas las superficies integrantes del recinto es:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{j=N} Q_{ij} = \sum_{j=1}^{j=N} (J_i - J_j)A_i \overline{F_{i-j}} \quad (4.31)$$

Por otra parte, según vimos antes, el intercambio total de un cuerpo con sus alrededores se puede expresar también de la siguiente forma:

$$Q_i = \frac{A_i \epsilon_i}{(1 - \epsilon_i)} [E_{ni} - J_i] \quad (4.32)$$

Notar que el doble subíndice se aplica a intercambios entre dos cuerpos, y el subíndice simple se aplica al intercambio de un cuerpo con todos los cuerpos que lo rodean.

**Convención:**  $Q_i > 0$  significa que la superficie  $i$  cede energía a los demás, necesitando un aporte desde el exterior. En consecuencia, todos los intercambios en la cavidad se describen por un sistema de  $2N$  ecuaciones (una de cada tipo por cada superficie). Estas son las ECUACIONES DE TRANSFERENCIA para radiación. Las ecuaciones expresan  $Q_i$  de dos formas diferentes.

- Caso 1:  $N$  superficies a temperaturas conocidas. Se conocen entonces los  $E_n$ . Igualando las dos expresiones de  $Q_i$  resulta un sistema de ecuaciones para las radiosidades  $J$ . Se resuelve el sistema para determinar los  $J$ , y con éstos se obtienen entonces los  $Q_i$  para cada cuerpo.
- Caso 2:  $N$  superficies con flujos de calor conocidos: La determinación de los  $J$  por resolución de las ecuaciones del primer tipo permite determinar los  $E_n$  y por lo tanto las temperaturas, con las ecuaciones del segundo tipo.
- Caso 3:  $K$  superficies de flujo conocido,  $N - K$  superficies de temperatura conocida: En este caso, la resolución del sistema completo de  $2N$  ecuaciones entregará las temperaturas de las superficies de flujo conocido, y los flujos de las de temperatura conocida.

Ejemplo: 3 superficies de temperatura impuesta. Evaluar los flujos de calor.

#### 4.5.1. Evaluación de los Factores de Forma

De lo anterior se desprende que disponer de factores de forma es imprescindible para hacer cálculos de radiación. Existe un gran número de situaciones cuyos FF han sido calculados y están catalogados en forma de ecuaciones o gráficos. Ejemplos:

1. Dos rectángulos iguales y paralelos, de lados  $a$  y  $b$ , directamente opuestos, a distancia  $c$ . Sean  $X = a/c$ ;  $Y = b/c$ .

$$\overline{F_{1-2}} = \frac{2}{\pi XY} \left[ \ln \left( \frac{(1 + X^2)(1 + Y^2)}{1 + X^2 + Y^2} \right)^{0,5} + X(1 + Y^2)^{0,5} \tan^{-1} \left( \frac{X}{(1 + Y^2)^{0,5}} \right) \right] \\ + \frac{2}{\pi XY} \left[ Y(1 + X^2)^{0,5} \tan^{-1} \left( \frac{Y}{(1 + X^2)^{0,5}} \right) - X \tan^{-1}(X) - Y \tan^{-1}(Y) \right]$$

De las 3 dimensiones geométricas, se forman dos adimensionales. Los factores calculados son iguales para todas las figuras "semejantes". Por lo tanto, es la forma y no las dimensiones lo que determina los factores.

2. Dos rectángulos perpendiculares con un lado común (1): La formula fue demasiado complicada al momento de transcribirla. No todos los factores de forma están calculados. Muchos FF pueden obtenerse indirectamente a través de otros ya conocidos. Para esto nos valemos de las siguientes propiedades de los FF:



- a) Campo visual completo: Si un cuerpo (1) está completamente rodeado por otro (2),

$$\overline{F_{1-2}} = 1$$

Ejemplo: una esfera (1) rodeada por otra mayor (2) cumple esta propiedad.

- b) Aditividad: El FF con que una superficie ve el conjunto de 2 o más superficies, es la suma de los factores con que ve a cada una de esas superficies.

$$\overline{F_{1-2,3}} = \overline{F_{1-2}} + \overline{F_{1-3}}$$

- c) Si un cuerpo  $i$  está completamente rodeado por  $N$  cuerpos  $j$ ,

$$\sum_{j=1}^N \overline{F_{i-j}} = 1$$

Combinando las dos propiedades anteriores, los factores de forma con que la esfera mayor (2) ve a la menor (1) y a sí misma, cumplen la relación:

$$1 = \overline{F_{2-1}} + \overline{F_{2-2}}$$

- d) Reciprocidad. Para dos cuerpos cualquiera, de áreas  $A_1$  y  $A_2$ ,

$$A_1 \overline{F_{1-2}} = A_2 \overline{F_{2-1}}$$

- e) Si desde un cuerpo 1, el cuerpo 2 no es visible:

$$\overline{F_{1-2}} = 0$$

Por ejemplo, la esfera menor no se ve a sí misma. Un plano tiene también un FF nulo respecto a sí mismo.

## 4.6. Interpretación Circuital de las Ecuaciones de Radiación en Recintos Cerrados

Se puede hacer una interpretación circuital de las ecuaciones de transferencia para radiación térmica. Esta interpretación es útil para resolver problemas que involucren pocas superficies, pero sobre todo para entender el significado físico de las resistencias térmicas radiativas. Para  $N$  superficies, teníamos las  $2N$  ecuaciones siguientes:

$$Q_i = \frac{A_i \epsilon_i}{(1 - \epsilon_i)} [E_{ni} - J_i] \quad (4.33)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{j=N} Q_{ij} = \sum_{j=1}^{j=N} (J_i - J_j) A_i \overline{F_{i-j}} \quad (4.34)$$

En el caso particular de 2 superficies, se tiene:

$$Q_1 = \frac{A_1 \epsilon_1}{(1 - \epsilon_1)} [E_{n1} - J_1] \quad (4.35)$$

$$Q_2 = \frac{A_2 \epsilon_2}{(1 - \epsilon_2)} [E_{n2} - J_2] \quad (4.36)$$

$$Q_1 = Q_{1-2} = (J_1 - J_2) A_1 \overline{F_{1-2}} \quad (4.37)$$

$$Q_2 = Q_{2-1} = (J_2 - J_1) A_1 \overline{F_{1-2}} \quad (4.38)$$

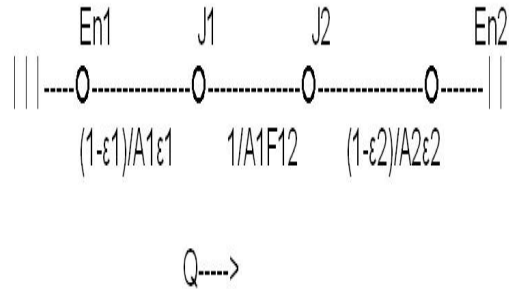
De las dos últimas ecuaciones se observa que  $Q_1 = -Q_2 = Q_{1-2} = -Q_{2-1} = Q$ . Por lo tanto, un mismo flujo de calor atraviesa tres "resistencias" en la forma:

$$Q = \frac{A_1 \epsilon_1}{(1 - \epsilon_1)} [E_{n1} - J_1] \quad (4.39)$$

$$Q = (J_1 - J_2) A_1 \overline{F_{1-2}} \quad (4.40)$$

$$Q = \frac{A_2 \epsilon_2}{(1 - \epsilon_2)} [J_2 - E_{n2}] \quad (4.41)$$

El mismo flujo pasa sucesivamente por puntos de potenciales  $E_{n1}$ ,  $J_1$ ,  $J_2$  y  $E_{n2}$ . Esta situación se puede representar por el siguiente diagrama de resistencias en serie:



A pesar de la no-linealidad de los flujos de calor con la temperatura (ley de Stefan-Boltzmann), se puede establecer relaciones "lineales" para el flujo de calor considerando como potenciales a los poderes emisivos y radiosidades. Se observan dos tipos de resistencias: resistencias de forma, del tipo  $1/AF$ , y resistencias de reflexión, del tipo  $(1 - \epsilon)/A\epsilon$ . Entonces, por simple inspección, el calor que fluye de 1 a 2 es:

$$Q = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\frac{(1-\epsilon_1)}{A_1 \epsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{(1-\epsilon_2)}{A_2 \epsilon_2}} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{(1-\epsilon_1)}{A_1 \epsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{(1-\epsilon_2)}{A_2 \epsilon_2}} \quad (4.42)$$

Este mismo resultado pudo haberse obtenido por resolución directa del sistema de ecuaciones.

- Las resistencias de forma son mayores mientras menor sea el factor de forma entre dos superficies.
- Del mismo modo, las resistencias de reflexión crecen al disminuir la emisividad de una superficie, siendo nulas para emisividad unitaria.

La solución general del problema de dos superficies permite resolver los casos de placas paralelas infinitas, cilindros concéntricos y esferas concéntricas.

#### 4.6.1. Algunos Casos de 2 Superficies

- Placas paralelas infinitas: en este caso el FF es unitario y las áreas se consideran iguales:

$$Q = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{(1-\epsilon_1)}{\epsilon_1} + 1 + \frac{(1-\epsilon_2)}{\epsilon_2}} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (4.43)$$

- Cilindros concéntricos infinitos: En este caso, si 1 es la superficie interior,  $F_{12}=1$ .

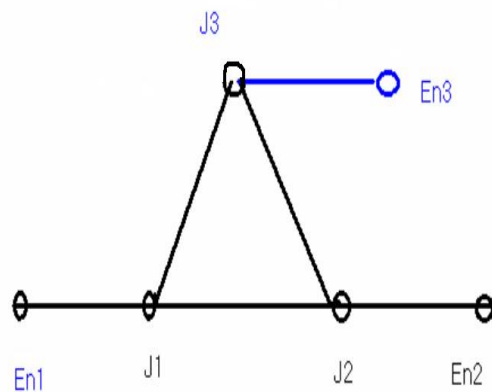
$$Q = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1(1-\epsilon_2)}{A_2 \epsilon_2}} \quad (4.44)$$

- Un razonamiento similar se puede hacer para esferas concéntricas. Cuerpo no negro (1) de emisividad  $\epsilon$ , rodeado por un cuerpo negro (2), cuya emisividad es 1. En este caso  $F_{12}=1$ :

$$\frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{(1-\epsilon)}{\epsilon} + 1} = A_1 \epsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4.45)$$

#### 4.6.2. Problema de 3 Cuerpos

El circuito se representa así:



El calor total que intercambia el cuerpo 1 con los demás ( $Q_1$ ) pasa entre los nodos  $E_{n1}$  y  $J_1$ . En esa rama actúa la resistencia de reflexión. En el nodo  $J_1$  este calor se divide en dos,  $Q_{12}$  y  $Q_{13}$ , que se envían a las superficies 2 y 3 respectivamente. El intercambio directo entre pares de superficies se representa por las trayectorias entre nodos de potenciales  $J$ . Si una de las superficies es negra, entonces  $J=E_n$ , y el potencial En se traslada al punto de potencial  $J$ , y no existe la rama externa. El flujo de calor en la rama externa se puede interpretar también como el calor que intercambia un cuerpo 1 con los alrededores (exterior de la cavidad). Por lo tanto, si una superficie (1) está aislada,  $Q_1=0$ , con lo cual

$$0 = \frac{A_1 \epsilon_1}{(1 - \epsilon_1)} [E_{n1} - J_1] \quad (4.46)$$

Entonces  $E_{n1}=J_1$ . Una superficie aislada se comporta entonces como una superficie negra, cualquiera que sea su emisividad. Finalmente se observa que si una superficie está aislada (por ejemplo, la 3 en el diagrama), al no existir intercambio con el exterior se suprime la rama externa. Entonces la superficie 3 se convierte en una trayectoria adicional (1-3-2) para el intercambio directo entre 1 y 2. Entonces se dice que una superficie aislada es "rerradiante", ya que entrega a algunos cuerpos de la cavidad todo el calor que recibe de otros cuerpos de la misma.

Una superficie aislada o rerradiante no tendrá una temperatura impuesta, ya que la condición de temperatura impuesta es incompatible con la de flujo de calor impuesto. En consecuencia, esa superficie tomará la temperatura apropiada para entregar todo el calor que recibe.

## 4.7. Radiación Combinada con Otros Modos de Transferencia de Calor

En muchas situaciones prácticas la radiación se da en combinación con otros modos. El tratamiento de estos casos dependerá de si se conoce o no la temperatura de la superficie radiante. La disipación total desde una superficie será la suma de las contribuciones convectivas y radiativas. Si la temperatura de la superficie es conocida, el cálculo es directo. En cambio, si la temperatura de la superficie no es conocida, entonces los flujos de calor radiativos y convectivos están acoplados, y para determinar el calor total que se entrega se debe determinar primero la temperatura superficial. **El acoplamiento entre los flujos se resuelve por medio de balances térmicos que involucren todos los modos de transferencia que actúan en un caso dado.**

**Ejemplo:** Placa plana sometida a radiación solar incidente, y con un flujo de aire paralelo a ésta: La radiación solar,  $G=600 \text{ W/m}^2$ , y la placa tiene una absorptividad de 0.8. La placa radia una energía que es función de su temperatura superficial,  $T_p$ , hacia el espacio a  $0^\circ\text{C}$ . El espacio, a  $T_a$ , se comporta como cuerpo negro, ya que no devuelve la radiación que se le envía. El aire incidente está a  $T_0=20^\circ\text{C}$ . Conociendo la velocidad del aire, las dimensiones de la placa y las propiedades del aire se puede determinar el coeficiente convectivo,  $h$ . La placa radia hacia el espacio una energía

$$Q_r = A\epsilon\sigma(T_p^4 - T_a^4)$$

La placa entrega por convección una energía

$$Q_c = Ah(T_p - T_0)$$

La energía incidente que es absorbida por la placa es:

$$GA\alpha = GA\epsilon$$

El balance de calor para la placa es:

$$GA\epsilon = A\epsilon\sigma(T_p^4 - T_a^4) + Ah(T_p - T_0)$$

De este balance se puede determinar la temperatura  $T_p$ , y con ella, evaluar el calor entregado por la placa. Para encontrar  $T_p$  todas las temperaturas (incluyendo las de los términos convectivos) se deben expresar en escala absoluta. Los balances de este tipo, una vez reemplazados los valores, se reducen a ecuaciones de la forma:

$$T_p^4 + bT_p + c = 0$$

Que se resuelven por iteración. Generalmente habrá una solución válida, con  $T_p$  positiva. Habrá otras soluciones, con  $T_p$  negativa, pero como  $T_p$  es una temperatura absoluta, estas soluciones no tienen significado físico.

## Capítulo 5

# Problemas Propuestos

1. Una barra cilíndrica de combustible nuclear, de conductividad  $55 \text{ W/mK}$  y  $8 \text{ cm}$  de diámetro, está colocada dentro de un tubo de acero 316, cuyos diámetros exterior e interior son de  $10 \text{ cm}$  y  $8 \text{ cm}$  respectivamente. La superficie exterior del tubo de acero está expuesta a un fluido a  $250^\circ\text{C}$ , con un coeficiente convectivo de  $3000 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Con una tasa de generación uniforme de energía en la barra de combustible, se requiere que la máxima temperatura en el tubo no exceda los  $300^\circ\text{C}$ . Determine:
  - a) La temperatura de la superficie externa del tubo.
  - b) La tasa de generación de energía ( $\text{W/m}^3$ )
  - c) La máxima temperatura en la barra de combustible

La conductividad térmica del acero empleado es de  $13.4 \text{ W/mK}$ .

2. Una pared plana de espesor y conductividad dados se encuentra sometida a un flujo de calor uniforme en la pared izquierda, ( $q_0 \text{ W/m}^2$ ), proveniente de una fuente remota (radiación solar). A ambos lados de la pared hay convección: a la izquierda de la pared la temperatura del aire es  $T_1$  y el coeficiente convectivo es  $h_1$ , mientras que a la derecha los datos correspondientes son  $T_2$ ,  $h_2$ . Formule el problema en función de los datos para obtener el flujo de calor a través de la placa.
3. Se debe aislar un horno de paredes planas metálicas. Sabiendo que las paredes del horno pueden alcanzar temperaturas de hasta  $400^\circ\text{C}$ , se desea aislarlas de modo que la temperatura exterior de la aislación sea de  $50^\circ\text{C}$ . Se dispone de dos materiales aislantes, uno de los cuales es de conductividad muy baja ( $0.036 \text{ W/mK}$ ) pero de alto precio y otro más barato pero de conductividad mayor ( $0.18 \text{ W/m}^2$ ). Este último material tiene una temperatura máxima de trabajo de  $200^\circ\text{C}$ . La cara exterior de la aislación estará expuesta a aire a  $30^\circ\text{C}$ , con un coeficiente convectivo de  $10 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Usando ambos materiales, determine los espesores requeridos para cumplir las condiciones de temperatura especificadas.
4. DISEÑO DE UN INTERCAMBIADOR DE CALOR. Se debe enfriar un caudal de agua caliente de  $1 \text{ kg/s}$  de  $90$  a  $60^\circ \text{C}$  mediante un segundo fluido (agua fría), que está disponible con un caudal mayor ( $2 \text{ kg/s}$ ), a una temperatura de  $40^\circ\text{C}$ . Para esta aplicación se diseñará un intercambiador de calor.

Se decide usar un intercambiador de tubos concéntricos, y de experiencia previa se determina que los diámetros interior y exterior del tubo central, serán de  $0.0381$  y  $0.03048$   $m$  respectivamente. La conductividad del material del tubo es de  $50$   $W/mK$ . El calor específico del agua es de  $4180$   $J/kgK$ . Se determina también que los coeficientes convectivos serán de  $4366$  y  $7600$   $W/m^2K$  para el fluido caliente y el frío respectivamente (a pesar de usar agua a ambos lados de la pared los coeficientes individuales difieren debido a la diferencia de caudales). El intercambiador operará en contracorriente. Usando los balances y la ecuación de transferencia obtenga el área de intercambio necesaria (área exterior del tubo). Determine también la longitud del intercambiador (De ser necesario indique el número necesario de tramos en serie, de  $4$   $m$  de largo  $c/u$ ), la eficiencia y el número de unidades de transferencia.

5. ALETA DE DOS MATERIALES. Se tiene una aleta rectangular de espesor  $b$  y ancho  $l$ , adosada a una pared a  $T_p$ . El medio circundante está a  $T_0$ , y el coeficiente convectivo es  $h$ . La aleta está compuesta de dos partes: desde  $x=0$  hasta  $x=L_1$ , está hecha de un material de conductividad térmica  $k_1$ . A mayores valores de  $x$  la aleta continúa con un segundo tramo, también de largo  $L_1$ , pero de otra conductividad térmica ( $k_2$ ). Se puede suponer que el extremo es adiabático. Plantee las ecuaciones para determinar las temperaturas en el punto de unión y en el extremo. Se puede definir el origen de coordenadas en el punto de unión.
6. El tubo interior de un intercambiador de calor de tubos concéntricos tiene diámetros interior y exterior de  $0.0221$  y  $0.0254$   $m$  respectivamente. El tubo es de acero, y su conductividad térmica es de  $40$   $W/mK$ . Se desea mejorar el coeficiente global de transferencia de calor de este intercambiador mediante la adición de 20 aletas longitudinales (del mismo material que el tubo), dispuestas radialmente en la superficie exterior del tubo. Las aletas tendrán un espesor de  $1$   $mm$ , y una longitud de  $7$   $mm$ . Calcule el coeficiente global de transferencia de calor (basado en el área interna) de este intercambiador. El coeficiente convectivo en la superficie interior (sin aletas) es de  $100$   $W/m^2K$ . Para la superficie exterior del tubo y las aletas, el coeficiente convectivo es de  $40$   $W/m^2K$ . **Nota:** En el interior del tubo circula el fluido  $A$  y en el exterior el fluido  $B$  del problema siguiente.
7. Se debe enfriar un fluido  $A$  de  $45^\circ C$  a  $27^\circ C$ . El caudal de este fluido es de  $0.2$   $kg/s$  y su calor específico es de  $2000$   $J/kgK$ . El fluido frío ( $B$ ) tiene un caudal de  $0.17$   $kg/s$ , su temperatura de entrada es de  $15^\circ C$ , y su calor específico es de  $2500$   $J/kgK$ . Se debe diseñar un intercambiador de calor para esta aplicación. El diseño de un intercambiador consiste en elegir la geometría del intercambiador, la disposición de flujos en éste, y determinar el área de transferencia necesaria. Se elige la geometría del problema del intercambiador de tubos concéntricos con aletas, y la disposición en contracorriente. Se pide determinar el área que debe tener el intercambiador. (Para simplificar, determine el área interna). **Nota:** Si Ud. no logró determinar el coeficiente global de transferencia en el intercambiador con aletas, puede diseñarlo eligiendo la misma geometría, pero sin aletas. Esto dará un área mayor que en el caso de usar aletas.
8. Desde un horno se extraen ladrillos a  $1300^\circ C$ , para que sean enfriados por aire, que está a  $30^\circ C$ . Si las dimensiones de un ladrillo son de  $6$   $cm$ ,  $9$   $cm$  y  $20$   $cm$ , y el coeficiente convectivo es de  $100$   $W/m^2K$  sobre todas sus superficies, encuentre la temperatura central del ladrillo, 30 minutos después

de ser sacado del horno. Propiedades del ladrillo: Conductividad térmica:  $0.72 \text{ W/mK}$ , Densidad:  $1920 \text{ kg/m}^3$ , Calor específico:  $1000 \text{ J/kgK}$ .

9. **BALANCES DE ENERGIA Y ECUACION DE TRANSFERENCIA.** Se debe calentar  $5000 \text{ kg/hr}$  de un aceite ( $C=2500 \text{ J/kgK}$ ) desde  $90^\circ\text{C}$  hasta  $30^\circ\text{C}$ . Para esto se tiene un caudal de agua de  $3000 \text{ kg/hr}$ , ( $C=4180 \text{ J/kgK}$ ) disponible a  $20^\circ\text{C}$ . Se usará un intercambiador de tubos concéntricos en contracorriente. Determinar:
  - a) Calor intercambiado y temperatura de salida del agua.
  - b) Diferencia de temperatura logarítmica, producto  $UA$  y  $N^\circ$  de unidades de transferencia del intercambiador necesario.
  - c) Calor máximo que sería posible transferir con las condiciones de entrada dadas. Eficiencia del intercambio, con el intercambiador especificado en b.
10. **EVALUACION DE UN COEFICIENTE CONVECTIVO.** El mismo caudal de agua del problema anterior ( $3000 \text{ kg/hr}$ ,  $20^\circ\text{C}$ ) ingresa a un tubo de  $2.54 \text{ cm}$  de diámetro interior. Para una longitud de 4 metros de tubo, determine la temperatura de salida y el calor transferido, considerando que esta vez la pared está sometida a una temperatura uniforme de  $100^\circ\text{C}$ . Indicación: Use la forma de la ecuación de Sieder Tate que se adapte a este caso. Para simplificar los cálculos, considere las propiedades del agua como constantes: Viscosidad =  $5,48 \times 10^{-4} \text{ kg/ms}$ , Conductividad =  $0.643 \text{ W/mK}$ ,  $C= 4180 \text{ J/kgK}$ .
11. **CALOR TOTAL TRANSFERIDO DESDE UNA PLACA PLANA.** Una placa plana de  $2 \text{ m}$  de ancho por  $4 \text{ m}$  de largo está a  $50^\circ\text{C}$ . En la dirección del lado más largo fluye aire a  $0^\circ\text{C}$ , con una velocidad de corriente libre de  $1.8 \text{ m/s}$ , paralelo a la placa. Encuentre el calor total transferido por la placa al aire. Indicación: Utilice el coeficiente convectivo medio para la placa. Considere también constantes las propiedades del aire: Viscosidad =  $1,85 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$ , Conductividad =  $0.0262 \text{ W/mK}$ ,  $C = 1005 \text{ J/kgK}$ , Densidad =  $1.177 \text{ kg/m}^3$ .
12. Este problema, se puede dividir en partes. Una placa metálica cuadrada de  $1 \text{ m}$  de lado debe someterse a un tratamiento térmico, para lo cual se debe mantener a una temperatura de  $600 \text{ K}$  por un tiempo prolongado. Para lograr esto, se la somete a radiación infrarroja proveniente de otro cuerpo de la misma forma y dimensiones, paralelo y frontalmente opuesto al primero. El calefactor tiene una emisividad de 0.9 y una temperatura de  $1000 \text{ K}$ , mientras la emisividad del cuerpo receptor (o absorbedor) es de 0.5. Ambas placas están separadas por una distancia de  $1 \text{ m}$ . La operación se realiza en un recinto grande, negro, cuyas paredes están a  $300 \text{ K}$ . Este recinto puede considerarse como un tercer cuerpo que completa un cubo con las placas calefactora y absorbidora. Se desea conocer la transferencia neta de calor que recibe la superficie absorbidora.
  - a) Caracterice la situación mediante un diagrama circuital, identificando los potenciales incógnitos, las direcciones de los flujos, y las resistencias que se deben determinar.
  - b) Calcule los factores de forma involucrados en este problema, las resistencias de forma y las resistencias de reflexión.



- c) Resuelva el circuito o el sistema de ecuaciones equivalente para determinar la transferencia neta de calor que recibe la superficie absorbadora.

Factor de forma para dos rectángulos iguales y paralelos, de lados  $a$  y  $b$ , directamente opuestos, a distancia  $c$ . Sean  $X=a/c$ ;  $Y=b/c$ .

$$\overline{F_{1-2}} = \frac{2}{\pi XY} \left[ \ln \left( \frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2} \right)^{0,5} + X(1+Y^2)^{0,5} \tan^{-1} \left( \frac{X}{(1+Y^2)^{0,5}} \right) \right] \\ + \frac{2}{\pi XY} \left[ Y(1+X^2)^{0,5} \tan^{-1} \left( \frac{Y}{(1+X^2)^{0,5}} \right) - X \tan^{-1}(X) - Y \tan^{-1}(Y) \right]$$

13. CONVECCIÓN NATURAL. La ventana de un recinto habitable tiene 2.5  $m$  de ancho y 2  $m$  de altura, y separa el medio interior del exterior a la habitación, los cuales están a temperaturas medias de 15 y 23°C respectivamente. Supongamos que el vidrio tiene un espesor despreciable, y que la temperatura de éste es de 19°C.
- a) Calcule la pérdida de calor desde el medio interior al exterior por unidad de tiempo (80 %).
- b) ¿Cual es la dirección de los flujos resultantes sobre la superficie del vidrio en el exterior y en el interior del recinto?.
14. CONDENSACIÓN. Un recipiente de sección trapezoidal se usa para condensar vapor de agua saturado a 100 °C y 1 atmósfera. Las paredes del recipiente están a 85 °C. El fondo de recipiente tiene 2  $m \times 2$   $m$  de sección. Dos lados opuestos de éste son verticales mientras, que los otros dos están inclinados en 45° respecto a la horizontal. Aunque hay una evacuación de condensado en el fondo del recipiente, se considera que por haber un pequeño nivel de líquido, esta superficie es inactiva para condensación. La altura del recipiente es de 0.8  $m$ . Estime la cantidad total de condensado producido por unidad de tiempo (80 %). ¿Dónde es mayor la producción de condensado, en las superficies verticales o en las inclinadas (20 %)? Propiedades del aire:  $\rho=1.177$   $kg/m^3$ ,  $\nu=1.57 \times 10^{-5}$ ,  $k=0.0262$   $W/mK$ ,  $C=1006$   $J/kgK$ ,  $\beta=1/T_\infty$ .
15. En los siguientes problemas se debe identificar y aplicar las correlaciones necesarias, usando las propiedades físicas relevantes obtenidas de las tablas que se entregan. Se pretende que usted obtenga una idea comparativa de los órdenes de magnitud de los coeficientes convectivos y flujos de calor esperables en fenómenos de convección natural, ebullición y condensación en condiciones geométricas y térmicas comparables. La geometría a considerar es común a los tres problemas y es un tubo horizontal de 1 pulgada (2.54  $cm$ .) de diámetro, colocado en un recipiente paralelepípedo cuyo lado mayor es paralelo al tubo. Los límites de temperatura son los mismos en los tres problemas. El fluido considerado en todos ellos es agua (o el sistema agua-vapor). Los tres problemas son totalmente independientes.
- EBULLICIÓN: Se evapora agua a presión atmosférica en un recipiente rectangular, abierto en su parte superior, que contiene un tubo horizontal de una pulgada de diámetro, que actúa como superficie calefactora sumergida. La temperatura de esta superficie se mantiene en 150°C mediante la circulación de un aceite mineral por el interior. Determine el coeficiente convectivo para la ebullición nucleada sobre

esta superficie ( $C_{sf}=0.013$ ). Obtenga el calor transferido y la cantidad de agua evaporada, ambos por unidad de tiempo y por unidad de longitud del tubo.

16. CONVECCIÓN NATURAL. Supongamos ahora que el recipiente está cerrado y que la presurización resultante impide la ebullición. La superficie calefactora se mantiene a  $150^{\circ}\text{C}$ , y la masa de agua se mantiene también a  $100^{\circ}\text{C}$  mediante una adecuada evacuación de calor por las paredes del recipiente. Al no haber ebullición debido a la presurización, el mecanismo de transferencia de calor al agua será el de convección natural. Determine el coeficiente convectivo y el calor transferido por unidad de tiempo y por unidad de longitud del tubo. Suponga que las propiedades del agua se pueden evaluar a  $100^{\circ}\text{C}$ .
17. CONDENSACIÓN. El recipiente está cerrado y se inyecta en él vapor saturado a  $150^{\circ}\text{C}$ . La temperatura de la pared del tubo es de  $100^{\circ}\text{C}$ , lo que se logra mediante la circulación de un fluido refrigerante por el interior. En estas condiciones se producirá condensación sobre el tubo. Determine el coeficiente convectivo medio sobre la superficie del tubo y el calor transferido, así como la tasa de condensación por unidad de tiempo y de longitud del tubo.