

ME-32A

Concentración de vacancias al equilibrio y Movilidad atómica en un cristal por el mecanismo de vacancias

Nomenclatura

- n : Número de vacancias
N: Número de átomos
n+N: Número total de sitios
 C_v : Concentración de vacancias, $C_v = n/(n+N)$. Sin embargo, para una solución diluida de vacancias en el cristal, se cumple satisfactoriamente $C_v = n/N$.
 C_v^* : Concentración de vacancias al equilibrio.
G: Energía libre de Gibbs
 R_a : Número promedio de saltos de un átomo del cristal, por unidad de tiempo
 R_v : Número promedio de saltos de una vacancia del cristal, por unidad de tiempo.
Ev: Entalpía o calor necesario para formar una vacancia, para una solución diluida de vacancias en el cristal
 E^* : Entalpía o calor necesario para que migre una vacancia, para una solución diluida de vacancia en el cristal.
v: Frecuencia de la vibración atómica de los átomos del cristal.
M: Número de coordinación del cristal, o número de primeros vecinos.
k: Constante de Boltzmann
No: Número de Avogadro
R: Constante de los gases, con $R = No k$

Consideremos la movilidad atómica en un cristal denso por el mecanismo de vacancias, propio de los metales puros y de las soluciones sólidas de sustitución. (El mecanismo es cómo ocurren los fenómenos). En este caso, cada vez que se mueve un átomo desde una posición a otra de la red, una vacancia se mueve al lugar de la red que ocupaba tal átomo. Por lo tanto, por unidad de tiempo, el número total de saltos atómicos es igual al número total de saltos de las vacancias. En consecuencia, se cumple:

$$R_v n = R_a N$$

de donde:

$$R_a = (n/N) R_v$$

Nos interesa llegar a determinar el valor de R_a . (Este valor se relaciona con el importante fenómeno de difusión atómica al estado sólido). Para ello calcularemos primero el valor de los dos multiplicandos del segundo miembro de la ecuación anterior: (n/N) y R_v .

Bajo condiciones de equilibrio químico, impuesto por G mínimo, se tienen que C_v^* es un valor pequeño, igual a n/N , y queda dado por la siguiente expresión:

$$C_v^* = e^{-(E_v / (kT))}$$

donde E_v es la energía (energía interna, en este caso prácticamente entalpía) para formar una vacancia y k es la constante de Boltzmann. El valor E_v es directamente dependiente de la intensidad del enlace.

Como C_v^* es pequeño, se habla de una solución diluida de vacancias en el cristal. (Veremos que un número grande de C_v^* , cuando la temperatura es muy elevada, es decir, próxima a la temperatura de fusión del cristal, es aproximadamente 1/1000. Esto significa, una vacancia cada mil átomos).

Además R_v , que también corresponde al número de átomos que en una unidad de tiempo saltan a una vacancia que se está desplazando, se expresa por:

$$R_v = A e^{-(E^* / (kT))}$$

donde A cumple aproximadamente con $A = M v$, donde M es el número de coordinación del cristal y v es la frecuencia de vibración atómica.

Observe que A se puede interpretar como el número total de intentos (fallidos y exitosos), por unidad de tiempo, de que los átomos que están en la primera vecindad de una vacancia dada salten a ella.

Por otra parte, $e^{-(E^* / (kT))}$ es la probabilidad, dada por la distribución de Boltzmann, de que un átomo vecino a una vacancia salte a ella, superando la barrera E^* ; así, $e^{-(E^* / (kT))}$ es la probabilidad de un intento de salto atómico sea exitoso. El alto de la barrera, E^* , se relaciona con la intensidad del enlace.

Finalmente, suponiendo condiciones de equilibrio químico y teniendo en cuenta que se trata de una solución diluida:

$$R_a = (n/N) R_v$$

$$R_a = A e^{-(E_v / (kT))} e^{-(E^* / (kT))}$$

$$R_a = A e^{-(E_v + E^*) / (kT)}$$

Cabe señalar que mientras más fuerte sea el enlace:

- E_v será mayor, es decir será más difícil formar una vacancia
- E^* será mayor, es decir será más difícil mover un átomo (y la vacancia asociada).

Problema propuesto

Considere un cristal de cobre, cuyos datos son:

Estructura cristalina: CCC

$N_0 E^* = 29$ [kcal/mol]

$N_0 E_v = 20$ [kcal/mol]

$\nu = 10^{15} / 12$ [s^{-1}]

$T_f = (1083 + 273)$ [K]

Otros datos de interés son:

$R = 2$ [cal/(mol K)]

$N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ partículas/mol

Se pide: calcule los valores de las magnitudes especificadas en la primera columna de la tabla adjunta, para cada una de las temperaturas indicadas en la primera fila de esa misma tabla. Con sus resultados, complete la tabla. Deje para el final el cálculo de la variable estimadora $D[b]$.

Recuerde que debe trabajar con la escala absoluta de temperaturas T [K].

	Cero absoluto: 0 [K]	Temperatura ambiente: (27+273) [K]	0,4 T_f [K] 524 [K]	0,6 T_f [K= 814 [K]]	Temperatura típica de laminación industrial del Cu: (800+273) [K]	Algo por debajo de la temperatura de fusión: 1350 [K]
C_v^* [n/N]						
$D[b]$.						
R_v [saltos / s]						
R_a [saltos / s]						

Nota: las temperaturas 0,4 T_f [K] y 0,6 T_f [K] definen un rango de temperatura de los sólidos llamado rango tibio.

Definición: D es un estimador entre dos vacancias vecinas, y se mide en número de distancias interatómicas b . Puede asumir un modelo simple de distribución de las vacancias en el cristal; por ejemplo, puede considerar que las vacancias forman una superred cúbica simple. También puede aproximar, en esta estimación, la celda del Cu a una celda cúbica simple. En tal caso las vacancias estarán sólo en los vértices de dichas superceldas y un buen estimador de D será el tamaño de esa arista. Obviamente, D es función de C_v^* . En el caso de un cristal como el cobre, b es el diámetro atómico, su unidad de medida.