Tarea 1 Ma56b

Profesor : Carlos Conca.
Auxiliar : León Sanz.

Problema 1

En esta pregunta nos interesa estudiar las soluciones del problema de Dirichlet en el sentido clasico:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u &= g \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Definición 0.1. *Una función subarmónica (superarmónica) en Ω u es una función $C^0(\Omega)$ tal que para toda bola $B \subset \Omega$ y para toda función h armónica en B que satisface $u \leq (\geq) h$ en ∂B, se tiene también $u \leq (\geq) h$ en B.*

Sea u una función subarmónica en Ω y B una bola estrictamente contenida en Ω. Sea $\bar{u}$ la función armónica definida en B que satisface $\bar{u} = u$ en ∂B.(Dada por la integral de Poisson de u en ∂B)

Definimos en Ω el *levantamiento armónico* de u en B por:

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & x \in B \\ u(x) & x \in \Omega - B \end{cases}$$

Pruebe que U es subarmónica en Ω.

Sean $u_1, \ldots, u_n$ funciones subarmónicas en Ω. Demuestre que $u(x) = max\{u_1(x), \ldots u_2(x)\}$ es subarmónica.

Sea Ω acotado y ϕ una función acotada en $\partial\Omega$. Una función $C^0(\Omega)$ subarmónica u se llama subfunción relativa a ϕ si satisface $u \leq \phi$ en $\partial\Omega$.

Sea S_ϕ el conjunto de subfunciones relativas a ϕ

Demuestre que $\hat{u}(x) = sup_{v \in S_\phi} v(x)$ es armónica en Ω

Demuestre que si el problema de Dirchlet tiene solución en el sentido clásico, entonces esta solución es idéntica a la función $\hat{u}$.

Definición 0.2. *Sea $\varphi \in \partial\Omega$. Una función $w = w_\varphi \in\ C^0(\Omega)$ se llama función barrera relativa a φ si:*

- *w es superarmónica en Ω.*
- *$w > 0$ en $\bar{\Omega} - \varphi$ y $w(\varphi) = 0$*

Un punto en la frontera se llama regular si existe una función barrera en ese punto.

Demuestre que el problema de Dirchelet con dominio acotado admite una solución clásica continua hasta la frontera si y sólo si todos los puntos de la frontera son regulares.

0.1. Problema 2

Demuestre con detalle y explicando claramente cada uno de los siguientes teoremas:

Teorema 0.1 (Desigualdad de Morrey). *Sea $1 < n < p < \infty$. Entonces existe una constante $C > 0$ que depende sólo de p y n tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda función $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ donde

$$\alpha = 1 - \frac{n}{p}$$

Teorema 0.2. *Sea Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ de frontera de clase C^1 y sea $n < p < \infty$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces u tiene una versión $u^* \in C^{0,\alpha}$, con $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ tal que:*

$$\|u^*\|_{C^{0,\alpha}} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Problema 3

En el contexto de operadores de segundo orden uniformemente elípitcos desarrolle en detalle los siguientes teoremas.

Teorema 0.3. *O bien, para cada función $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil del problema:*

$$\begin{array}{lrcll} (\alpha) & Lu & = & f & \text{en } \Omega \\ & u & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array}$$

o bien, existe una solución no trivial del problema homogéneo

$$\begin{array}{lrcll} (\beta) & Lu & = & 0 & \text{en } \Omega \\ & u & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array}$$

Además, si se satisface (β), la dimensión del subespacio $N \subset H_0^1(\Omega)$ de soluciones débiles del problema (β) es finito y coincide con la dimensión del subespacio $N^* \subset H_0^1(\Omega)$ de soluciones débiles del problema:

$$\begin{aligned} L^*v &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Con L^* el operador adjunto de L.

Finalmente, el problema (α) tiene solución si y sólo si

$$(f, v) = 0 \quad \text{para toda } v \in N^*$$

Teorema 0.4. *Existe a lo más un conjunto numerable $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que el problema*

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u + f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

tiene una única solución débil para cada $f \in L^2$ si y solo sí $\lambda \notin \Sigma$.